



ハンドリング工学特論

大阪大学大学院 工学研究科 マテリアル生産科学専攻
システムインテグレーション講座
生産システムインテグレーション領域
若松 栄史





柔軟物モデリング





格子モデリング

- 物体の変形を記述する一般的な手法は有限要素法 (FEM)
→物体の変形特性を精密に表現可能
- 柔軟物ハンドリングの多くは、物体上の代表点の運動で記述できる

格子モデリング (lattice modeling)

ハンドリング対象物を代表点の集合で表し、その物理特性を代表点間の力学要素で記述する手法

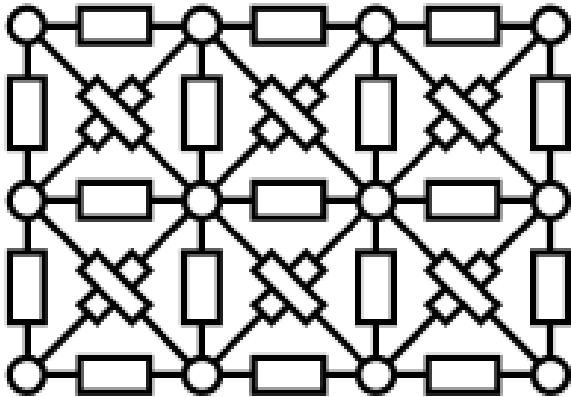
- 一次元／二次元／三次元モデル
- 静的／動的モデル



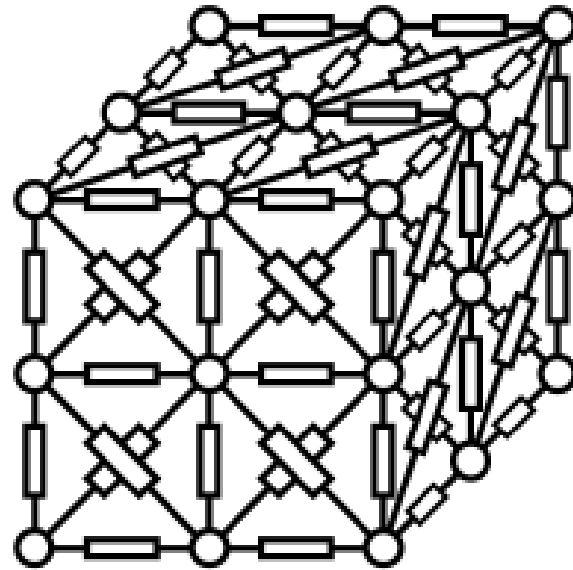
格子モデル



一次元モデル



二次元モデル



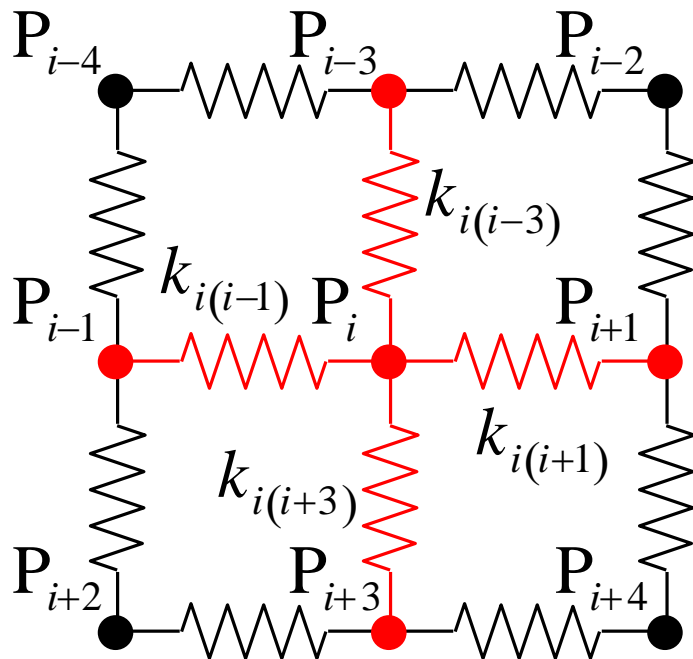
三次元モデル



格子モデルによる変形表現

n 個の格子点 P_0, P_1, \dots, P_{n-1}

格子点 P_i の座標: \mathbf{x}_i



格子点 P_i と P_j を結ぶ

バネの自然長: L_{ij}

バネの伸び: $d_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - L_{ij}$

ポテンシャルエネルギー:

$$U_{ij} = \frac{1}{2} k_{ij} d_{ij}^2$$

全ポテンシャルエネルギー:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in A_i} U_{ij}$$

変形形状: U を最小とする \mathbf{x}_i





微分幾何法

格子モデリング:

- 一般的なモデリング手法
- 変形が大きくなると計算が不安定になりやすい
- 曲げ変形やねじり変形を伴う線状物体に対しては変形の記述が難しい

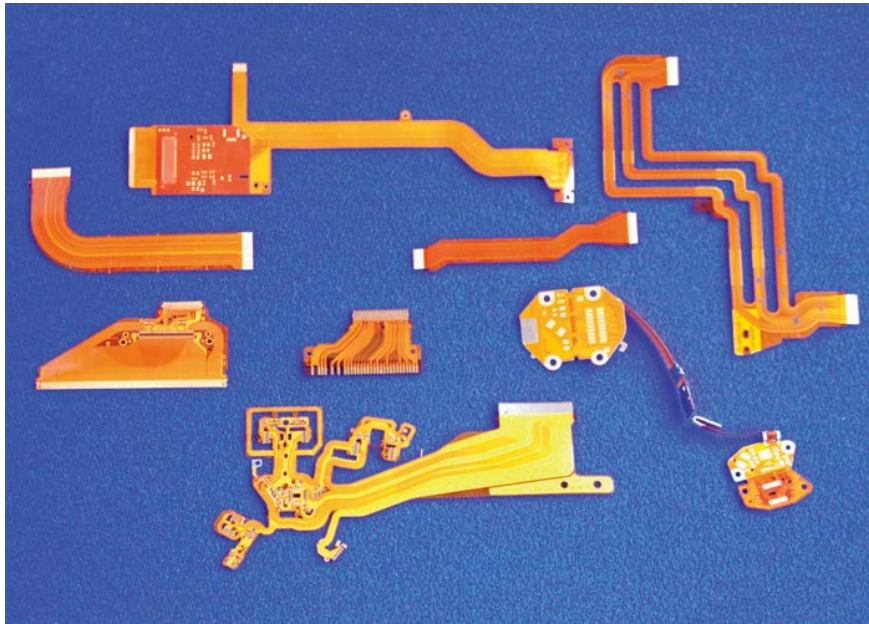
微分幾何法 (differential geometry method)

平面内／空間内の曲線／曲面を曲がり具合(微分)等の特徴量を用いて記述する方法

→物体の変形形状をパラメータを用いて連続的に表現できる



薄板状物体の例



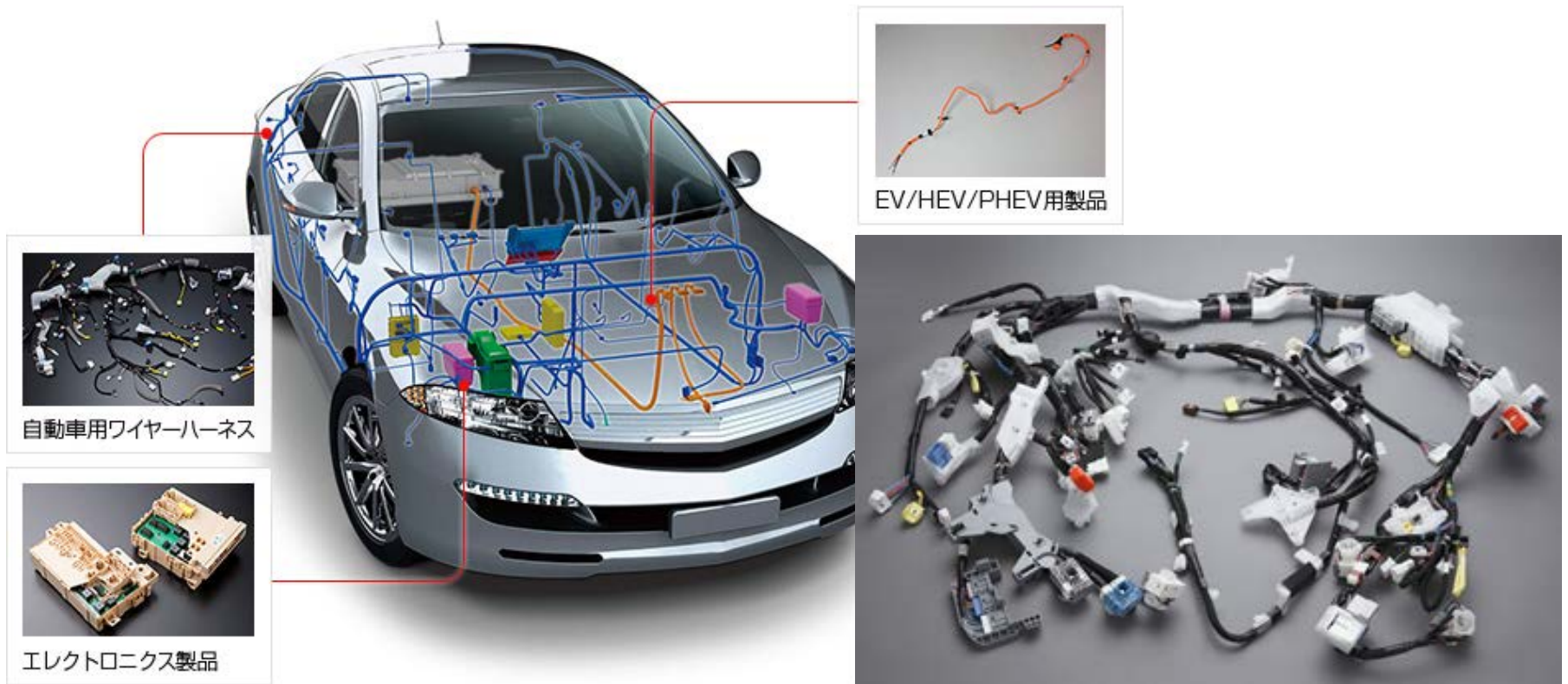
フレキシブル基板



フラットケーブル



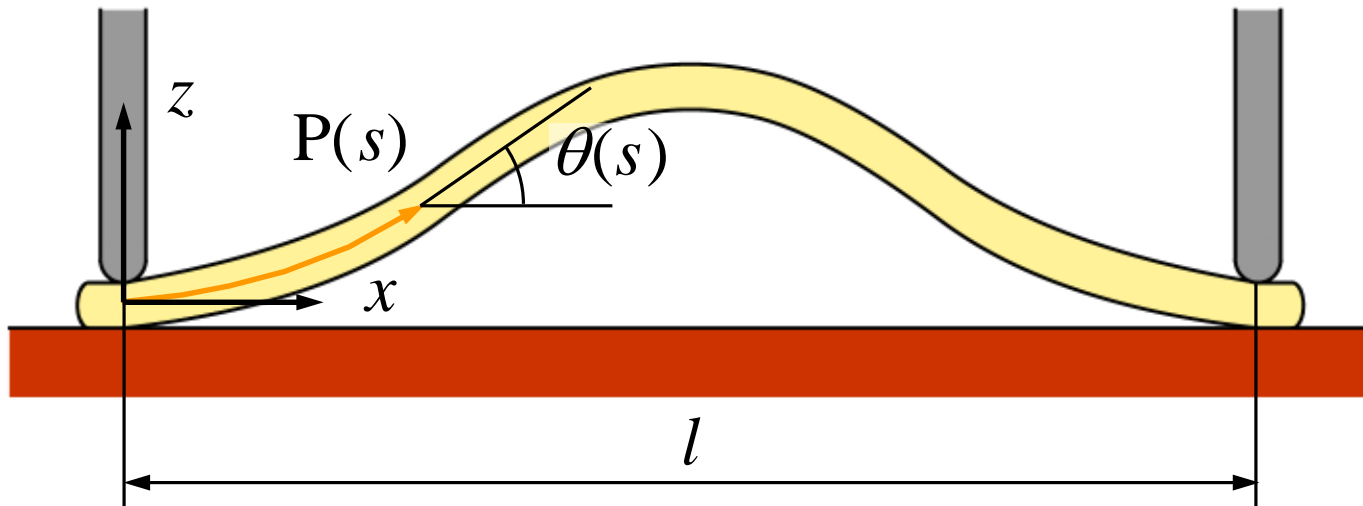
線状物体の例



自動車内部のワイヤーハーネス

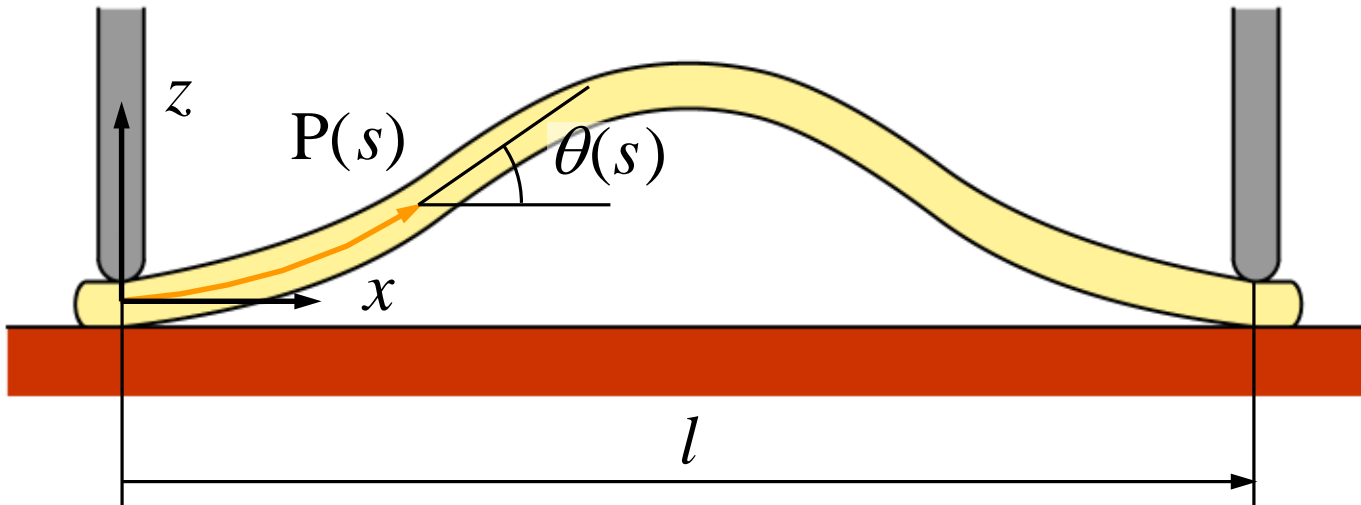


テーブル上の紙の一様変形



点 $P(s)$ の座標:
$$\begin{bmatrix} x(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^s \cos \theta(s) ds \\ \int_0^s \sin \theta(s) ds \end{bmatrix}$$

紙のポテンシャルエネルギー



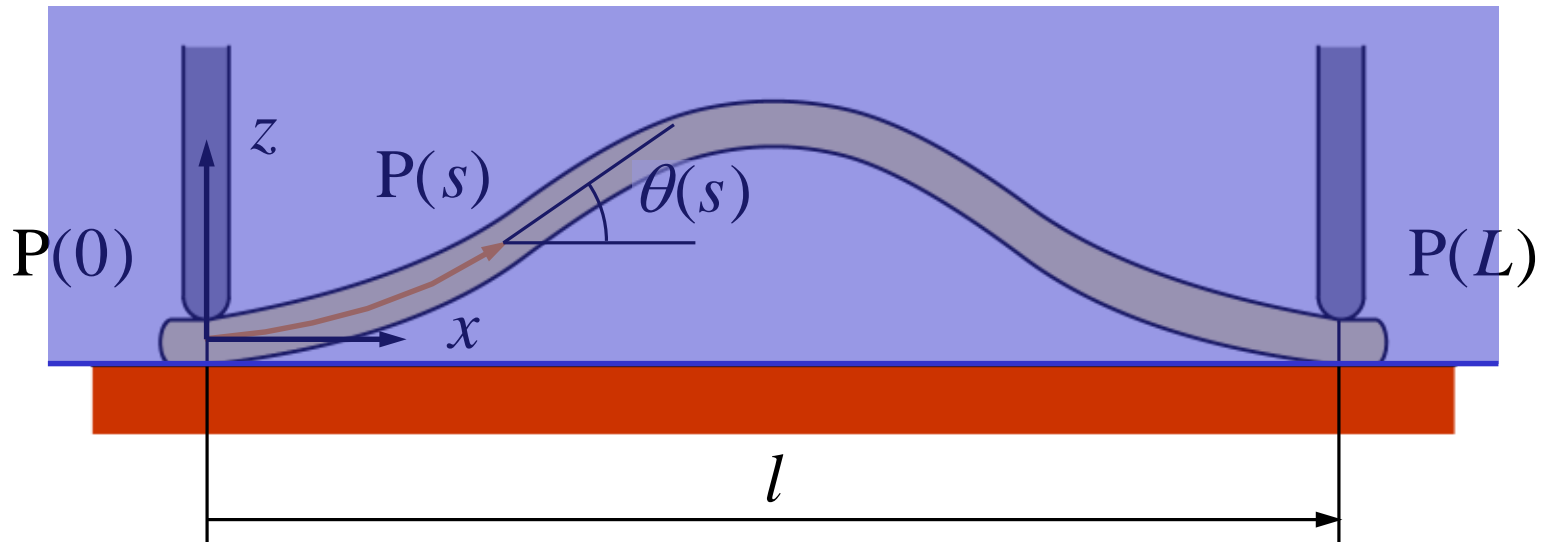
曲げによる弾性ポテンシャル:
$$U_{\text{flex}} = \int_0^L \frac{1}{2} R_f \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds$$

重力ポテンシャル:
$$U_{\text{grav}} = \int_0^L Dgz(s) ds$$

ポテンシャルエネルギー:
$$U = U_{\text{flex}} + U_{\text{grav}}$$



紙に加えられる幾何学的制約



両端の姿勢に関する制約: $\theta(0) = 0$ $\theta(L) = 0$

右端の位置に関する制約: $x(L) = l$ $z(L) = 0$

紙全体の位置に関する制約: $z(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, L]$



紙の変形形状の導出手法

静力学の変分原理より

物体の安定な変形形状: **ポテンシャルエネルギーが最小**

幾何学的制約のもとでポテンシャルエネルギーを最小にする

$\theta(s)$ ($0 \leq s \leq L$) を求める

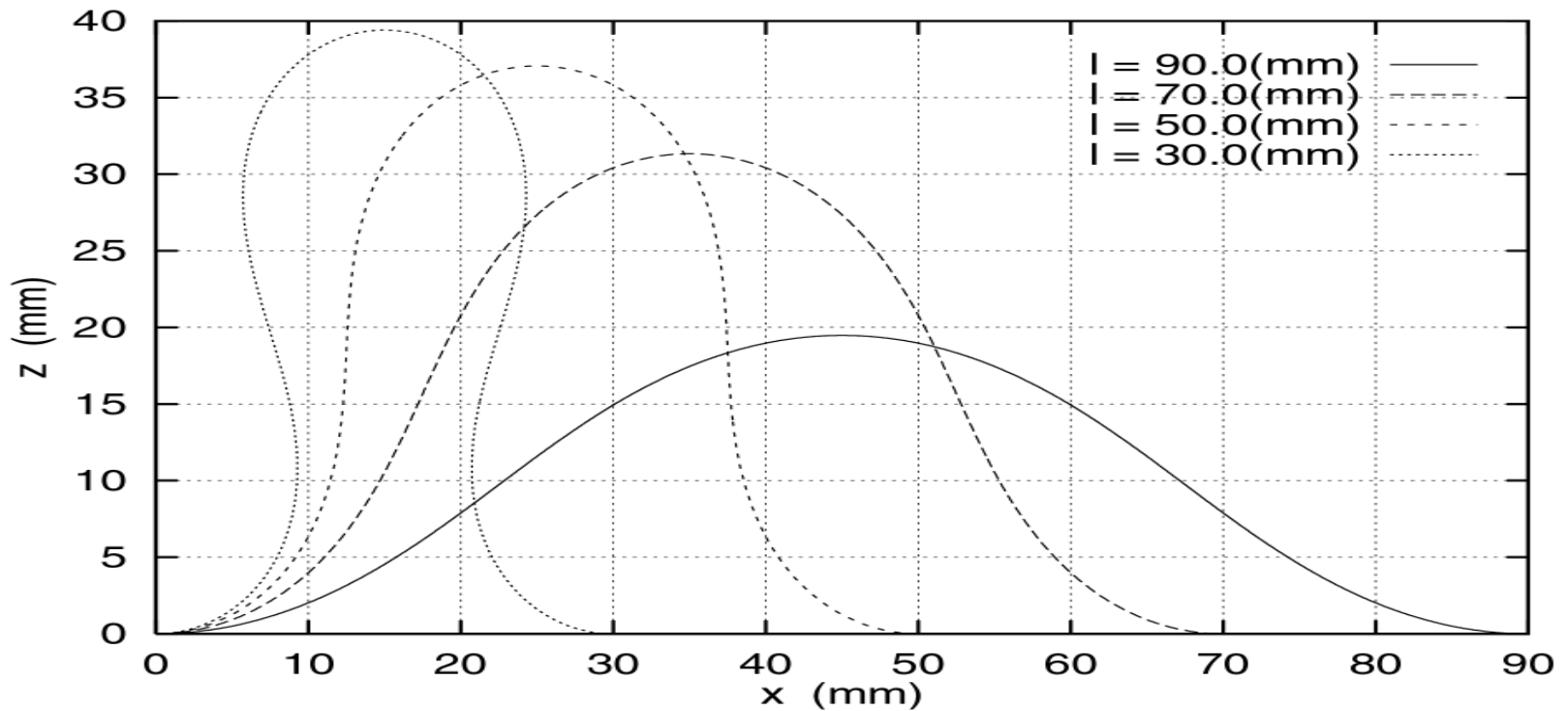
$$\theta(0) = 0, \quad \theta(L) = 0, \quad \int_0^L \cos \theta \, ds = l, \quad \int_0^L \sin \theta \, ds = 0,$$

$$\int_0^s \sin \theta \, ds \geq 0 \quad \forall s \in [0, L] \quad \text{のもとで}$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} R_f \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds + \int_0^L Dg \left(\int_0^s \sin \theta \, ds \right) ds \text{ を最小化}$$



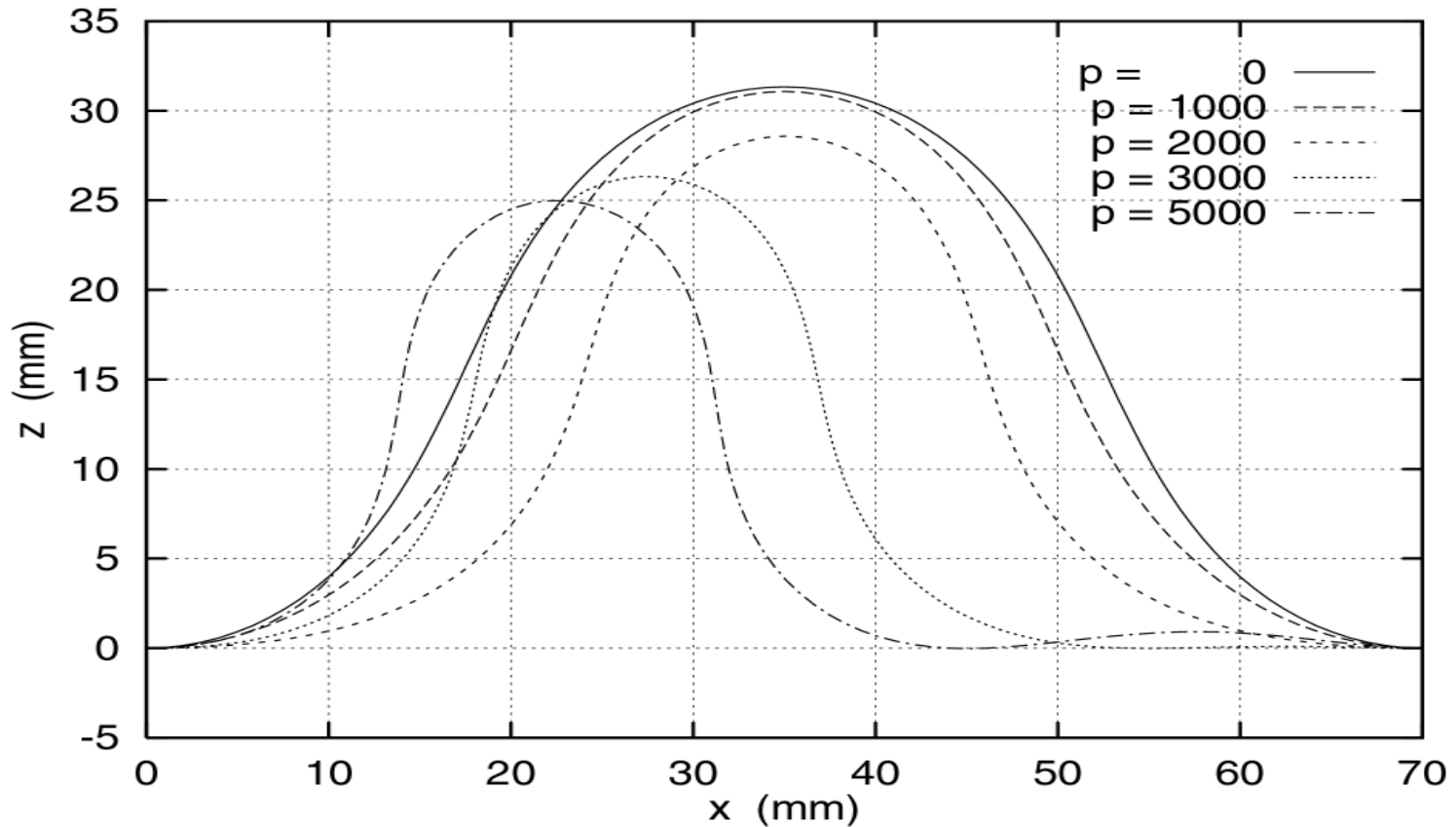
紙の変形形状計算例①



重力の影響を考慮しない場合の変形形状



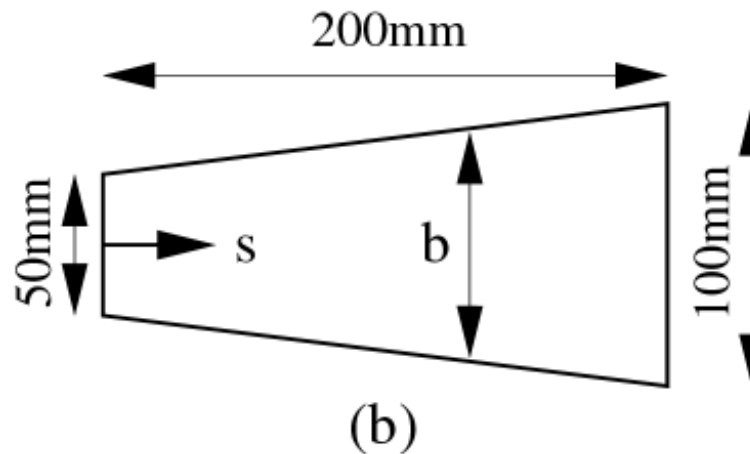
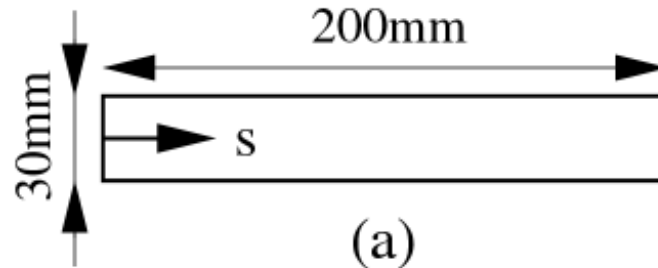
紙の変形形状計算例②



重力の影響を考慮した場合の変形形状



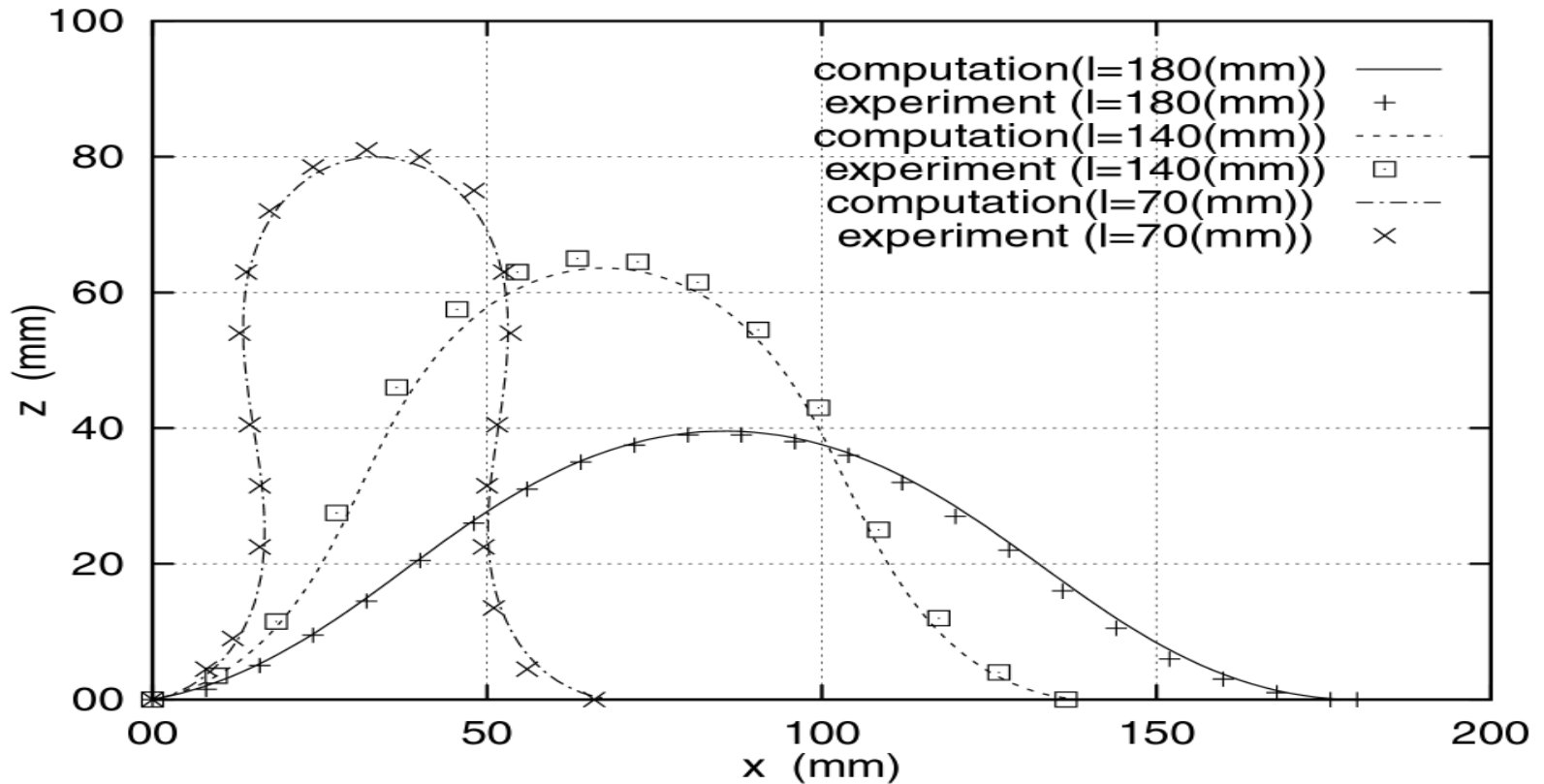
紙の変形状計測実験



$$(a) U_{\text{flex}} = \frac{R_f}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds \quad (b) U_{\text{flex}} = \frac{1}{2} \int_0^L R_f(s) \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds$$



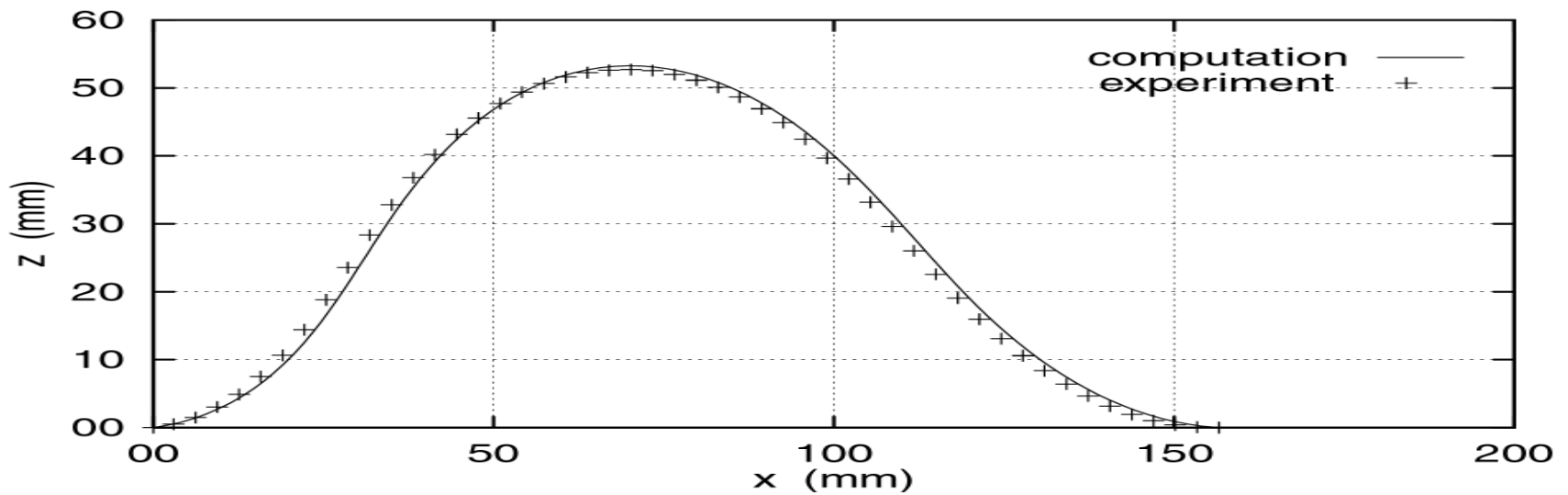
計算値と実測値の比較①



(a) 矩形型用紙の場合



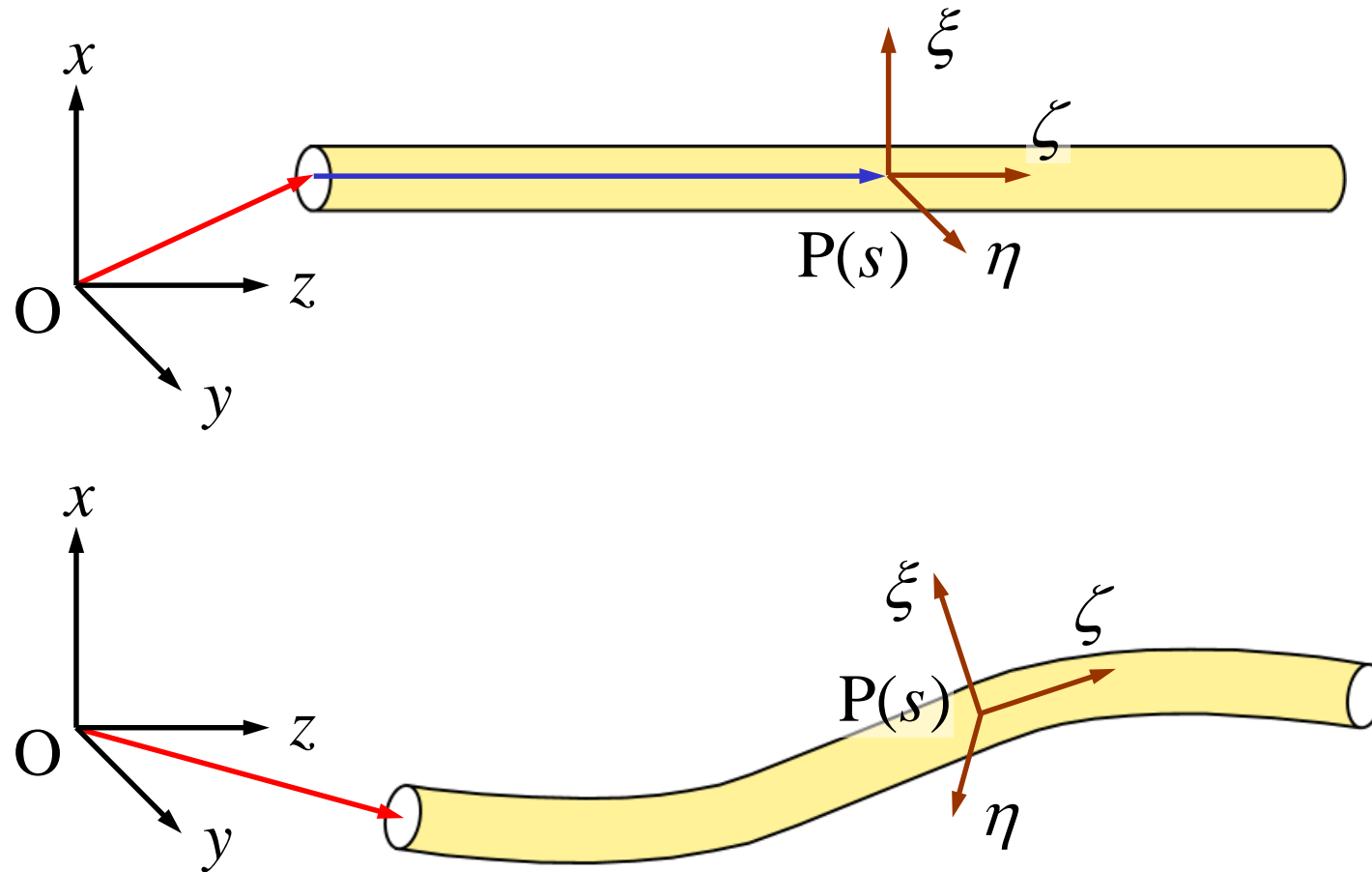
計算値と実測値の比較②



(b) 台形型用紙の場合



線状物体の三次元変形の表現



物体の空間位置

座標変換行列は、オイラー角 $\phi(s), \theta(s), \psi(s)$ を用いて

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \end{bmatrix}$$

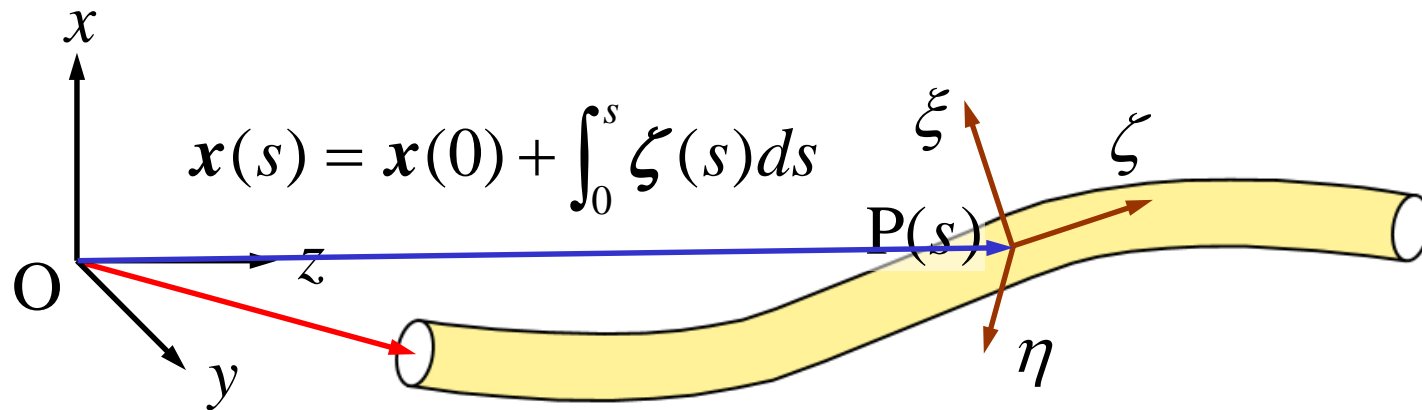
ξ

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\cos \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi \end{bmatrix}$$

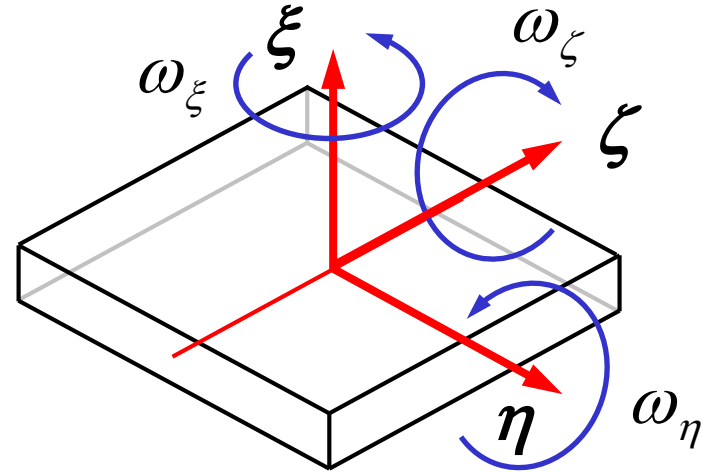
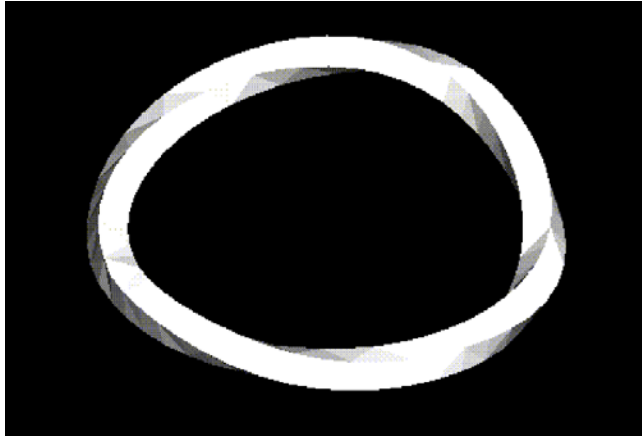
η

$$\begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

ζ



Frenet-Serretの公式



$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

Frenet-Serretの公式

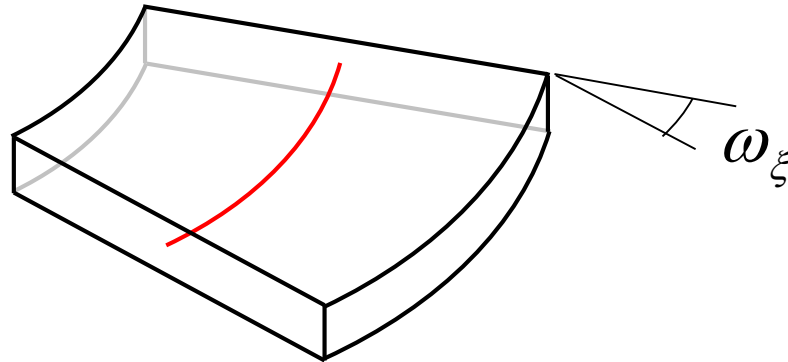
$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

剛体の姿勢変化

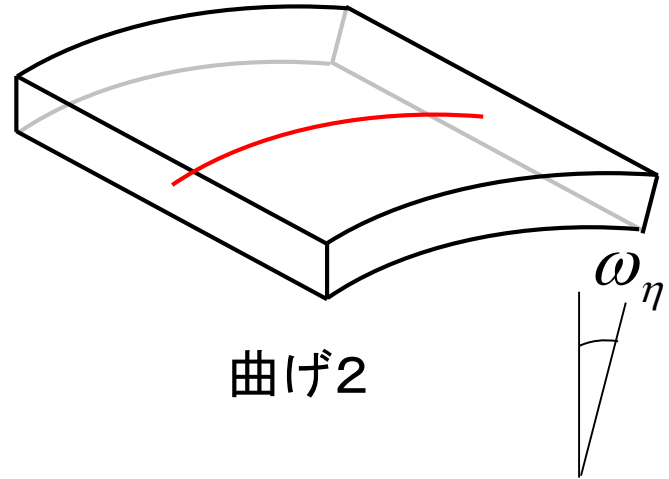
時間tでの微分から距離sでの微分に



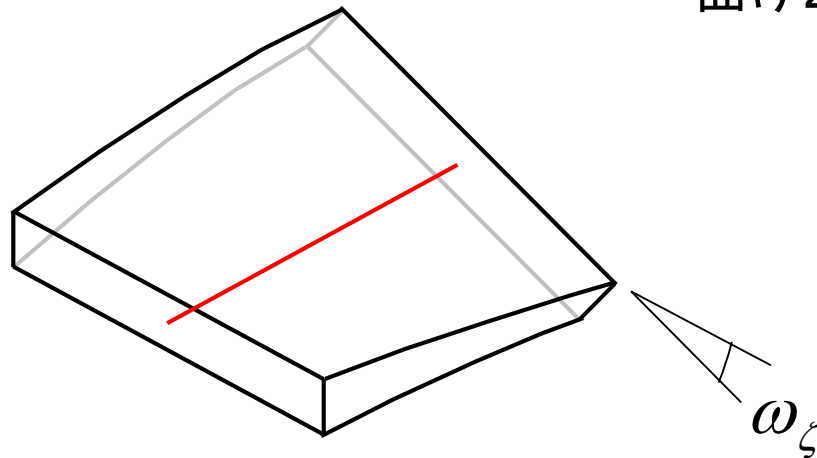
線状物体の微小要素の変形



曲げ1



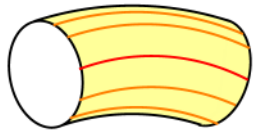
曲げ2



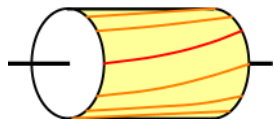
ねじれ



物体の曲率・ねじれ率



$$\text{曲率: } \kappa^2 = \omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2 = \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \sin^2 \theta$$

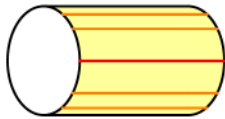


$$\text{ねじれ率: } \omega^2 = \omega_{\zeta}^2 = \left(\frac{d\psi}{ds} + \frac{d\phi}{ds} \cos \theta \right)^2$$

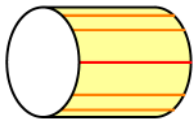
空間座標、曲率、ねじれ率:

距離 s に依存する独立なパラメータ $\phi(s), \theta(s), \psi(s)$ で表すことができる

伸縮変形が生じる場合



ds



$\{1 - \varepsilon(s)\} ds$

物体の空間座標:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \int_0^s \{1 - \varepsilon(s)\} \boldsymbol{\zeta}(s) ds$$

変形形状:

パラメータ $\phi(s), \theta(s), \psi(s), \varepsilon(s)$

で表すことができる

物体のポテンシャルエネルギー

$$\text{ポテンシャルエネルギー: } U = U_{\text{flex}} + U_{\text{tor}} + U_{\text{ext}} + U_{\text{grav}}$$

$$\text{曲げによる弾性ポテンシャル: } U_{\text{flex}} = \int_0^L \frac{1}{2} R_f \kappa^2 ds$$

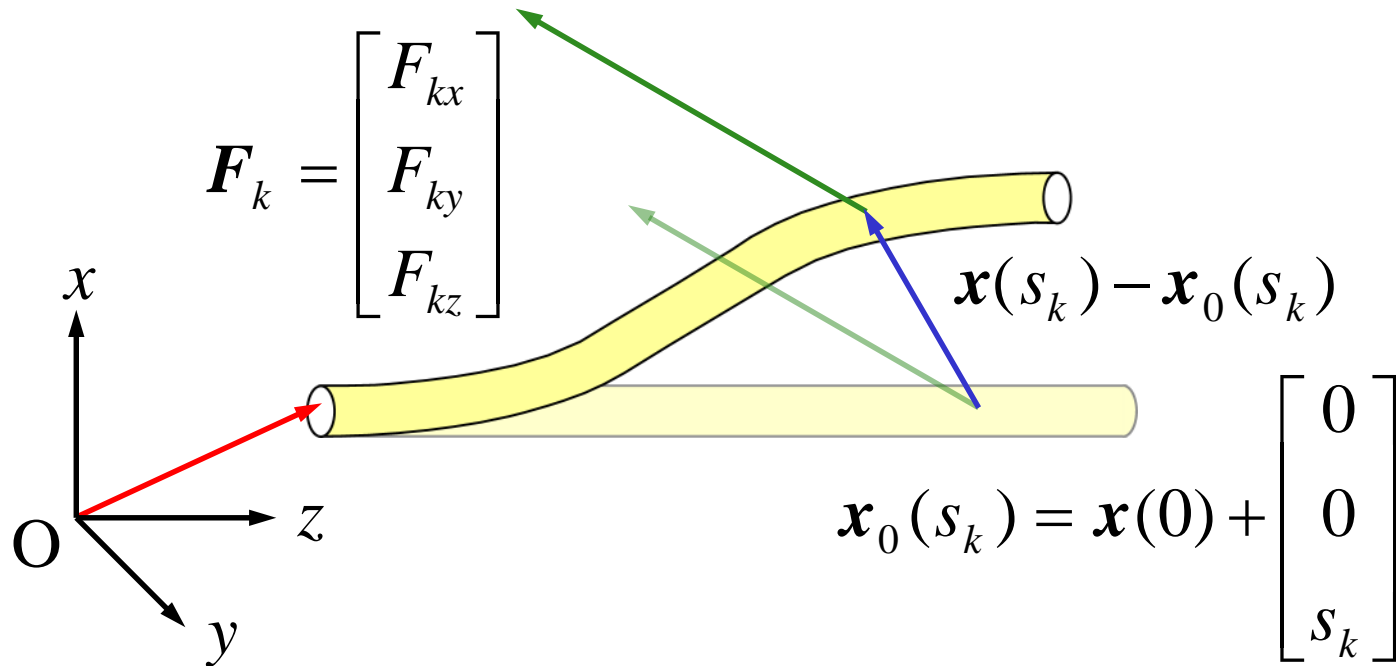
$$\text{ねじれによる弾性ポテンシャル: } U_{\text{tor}} = \int_0^L \frac{1}{2} R_t \omega^2 ds$$

$$\text{伸縮による弾性ポテンシャル: } U_{\text{ext}} = \int_0^L \frac{1}{2} R_e \varepsilon^2 ds$$

$$\text{重力ポテンシャル: } U_{\text{grav}} = \int_0^L D g x ds$$



外力が成す仕事



$$F_k \text{ が成した仕事: } F_k \cdot \{\mathbf{x}(s_k) - \mathbf{x}_0(s_k)\}$$

$$\text{全仕事: } W = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \{\mathbf{x}(s_k) - \mathbf{x}_0(s_k)\}$$





変形形状の導出手法①

静力学の変分原理: $\delta(U - W) = 0$

→ 静的な安定形状で内部エネルギー $U - W$ が最小になる

幾何学的制約条件のもとで内部エネルギー $U - W$ が最小となるようなパラメータ $\phi(s), \theta(s), \psi(s), \varepsilon(s)$ を求める

→ 物体の静的に安定な変形形状



変形形状の導出手法②

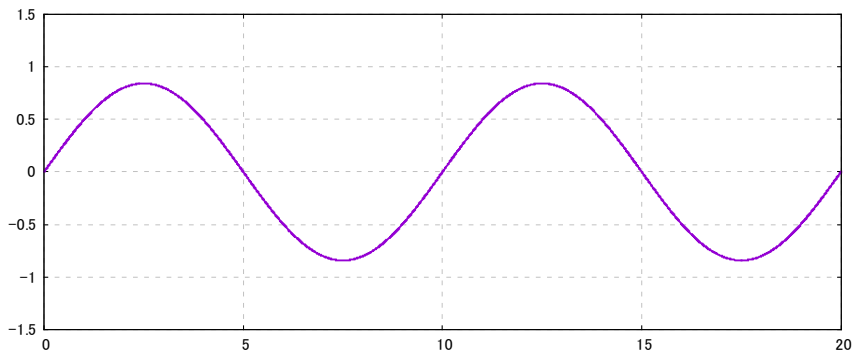
$$\begin{bmatrix} \phi(s) \\ \theta(s) \\ \psi(s) \\ \varepsilon(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^\phi e_i(s) \\ \sum_{i=1}^n a_i^\theta e_i(s) \\ \sum_{i=1}^n a_i^\psi e_i(s) \\ \sum_{i=1}^n a_i^\varepsilon e_i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^\phi \\ \mathbf{a}^\theta \\ \mathbf{a}^\psi \\ \mathbf{a}^\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}(s)$$

$$\mathbf{a} = \left[\mathbf{a}^{\phi^T} \quad \mathbf{a}^{\theta^T} \quad \mathbf{a}^{\psi^T} \quad \mathbf{a}^{\varepsilon^T} \right]^T$$

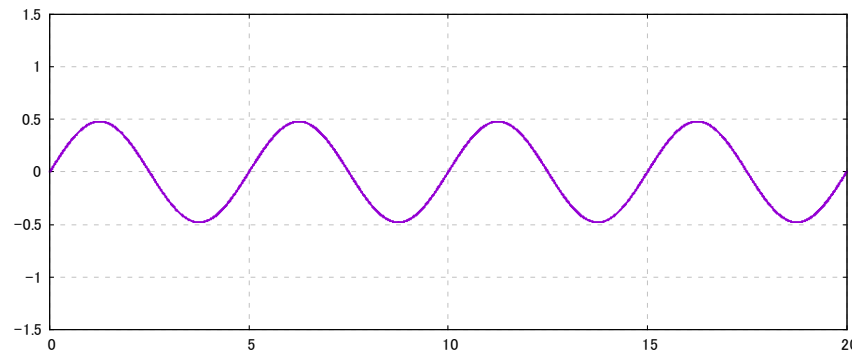
→係数ベクトル \mathbf{a} に関する最適化問題



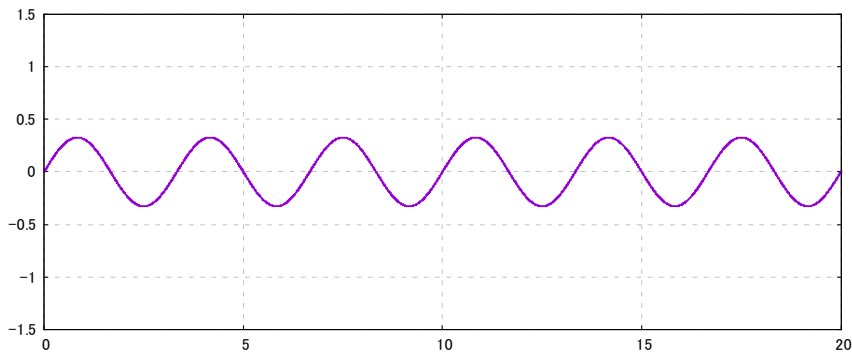
既知の関数の線形和



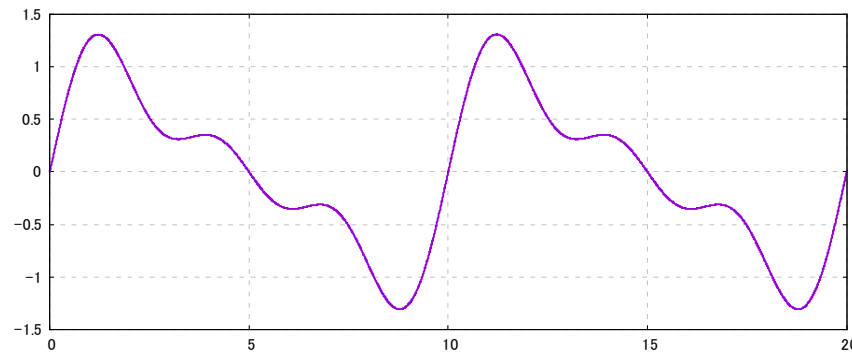
$$y = a_1 e_1(s)$$



$$y = a_2 e_2(s)$$



$$y = a_3 e_3(s)$$



$$y = \sum_{i=1}^3 a_i e_i(s)$$



変形形状の導出手法③

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && U(\mathbf{a}) - \sum_m W_m(\mathbf{a}) \\ & \text{subject to} && g_j(\mathbf{a}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, u) \\ & && h_k(\mathbf{a}) = 0 \quad (k = 1, \dots, v) \end{aligned}$$

制約あり最適化問題を制約なし最適化問題に

変換した場合の修正目的関数:

$$O'(\mathbf{a}) = U(\mathbf{a}) - \sum_m W_m(\mathbf{a}) + \sum_j \lambda_j^{\text{in}} g_j(\mathbf{a}) + \sum_k \lambda_k^{\text{eq}} h_k(\mathbf{a})$$

$\lambda_j^{\text{in}}, \lambda_k^{\text{eq}}$: 未定乗数

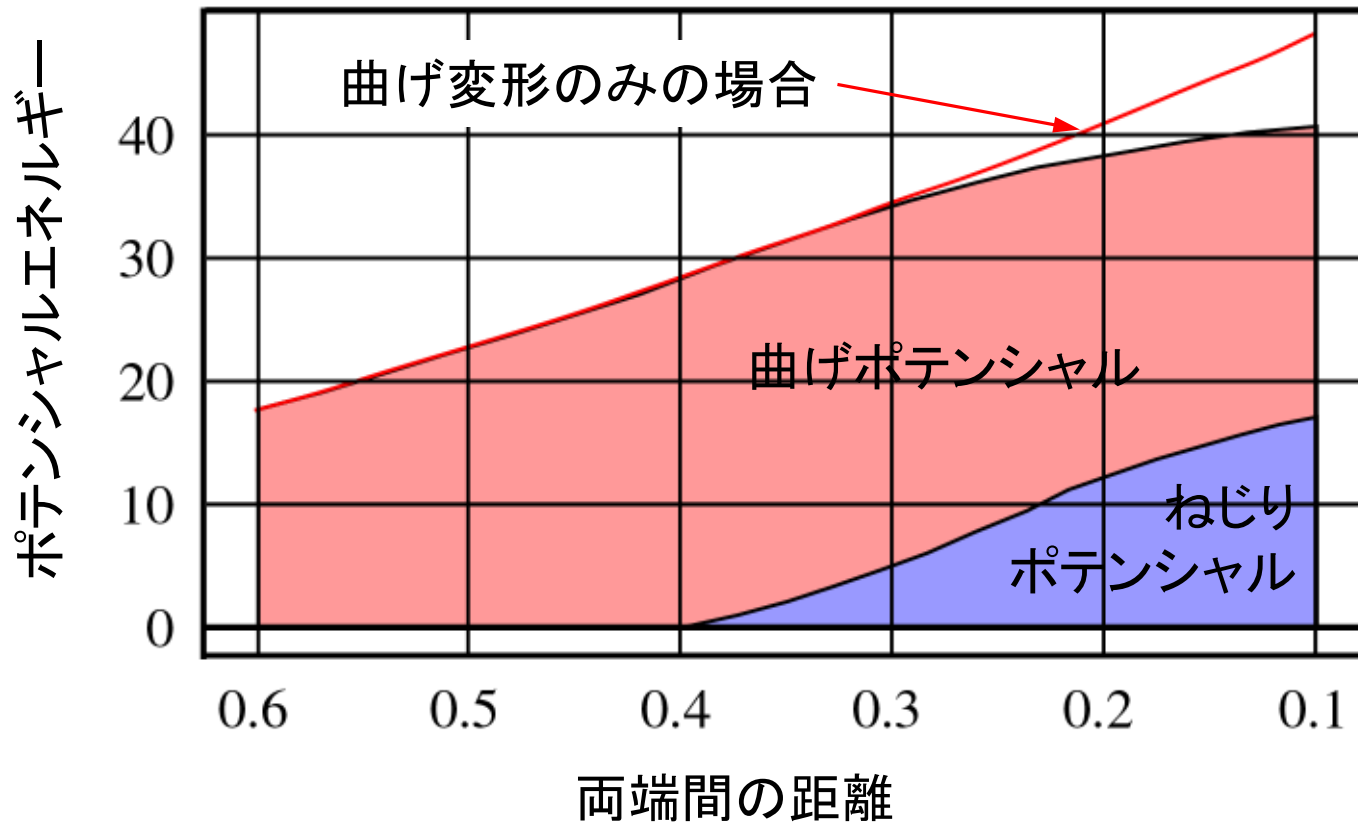
最適化計算により $\mathbf{a}, \lambda_j^{\text{in}}, \lambda_k^{\text{eq}}$ が求められる



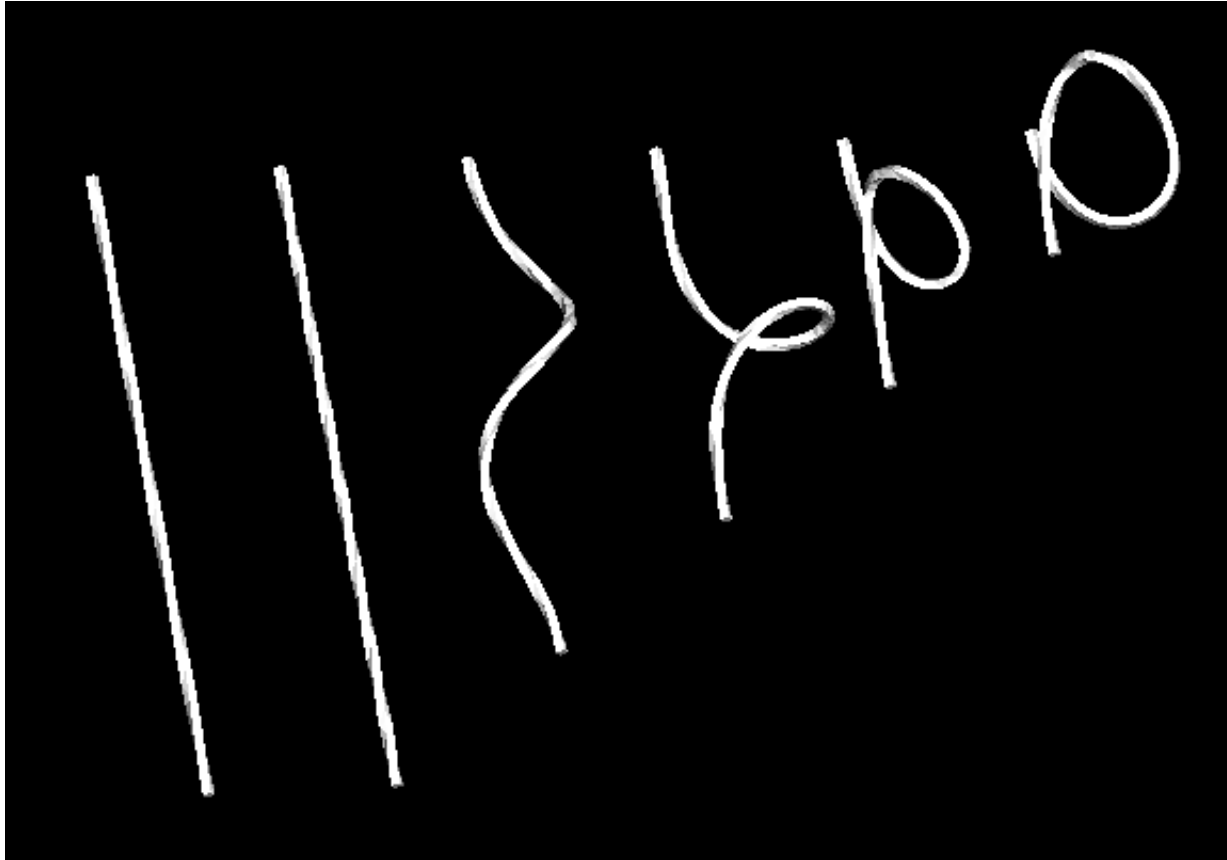
線状物体の変形形状計算例①



変形形状とポテンシャルエネルギーの関係①



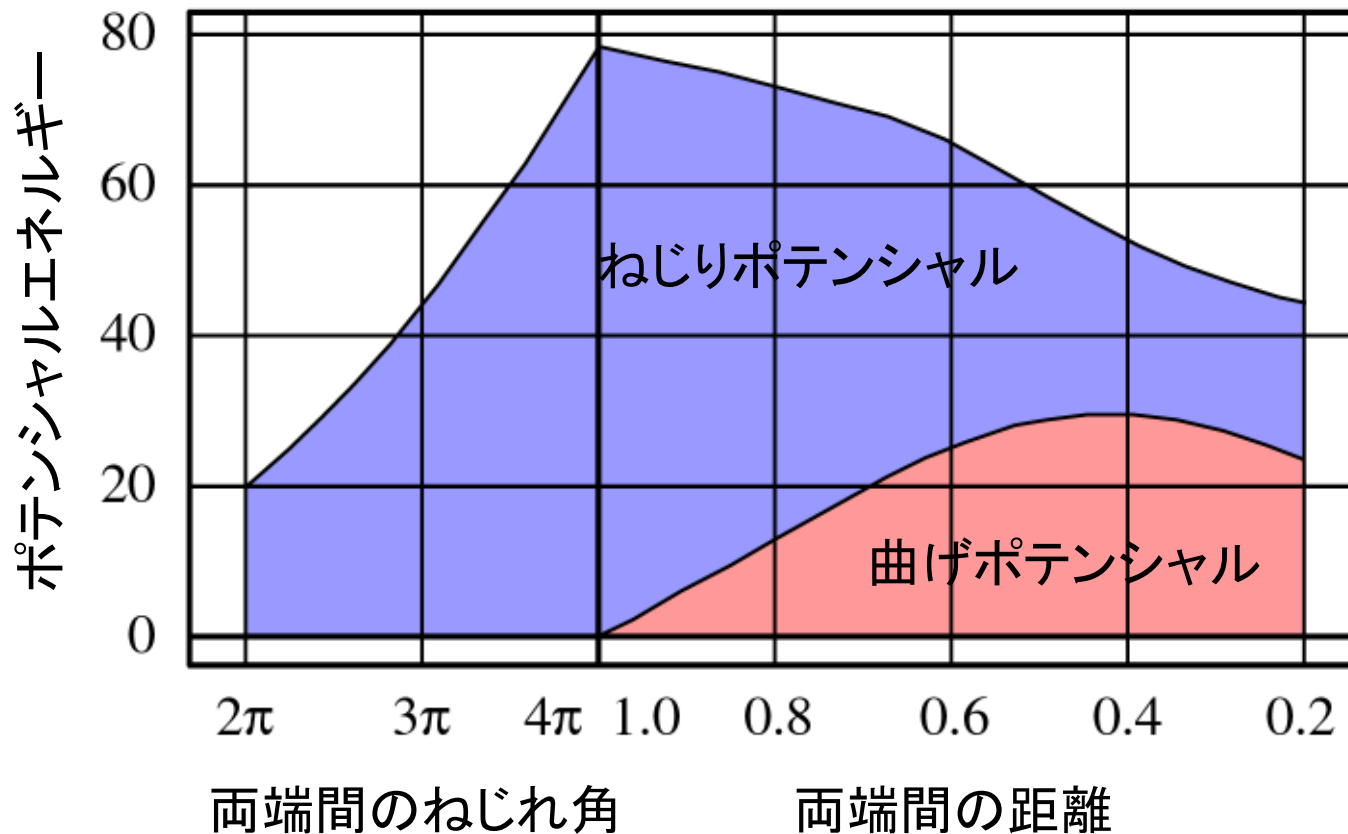
線状物体の変形形状計算例②



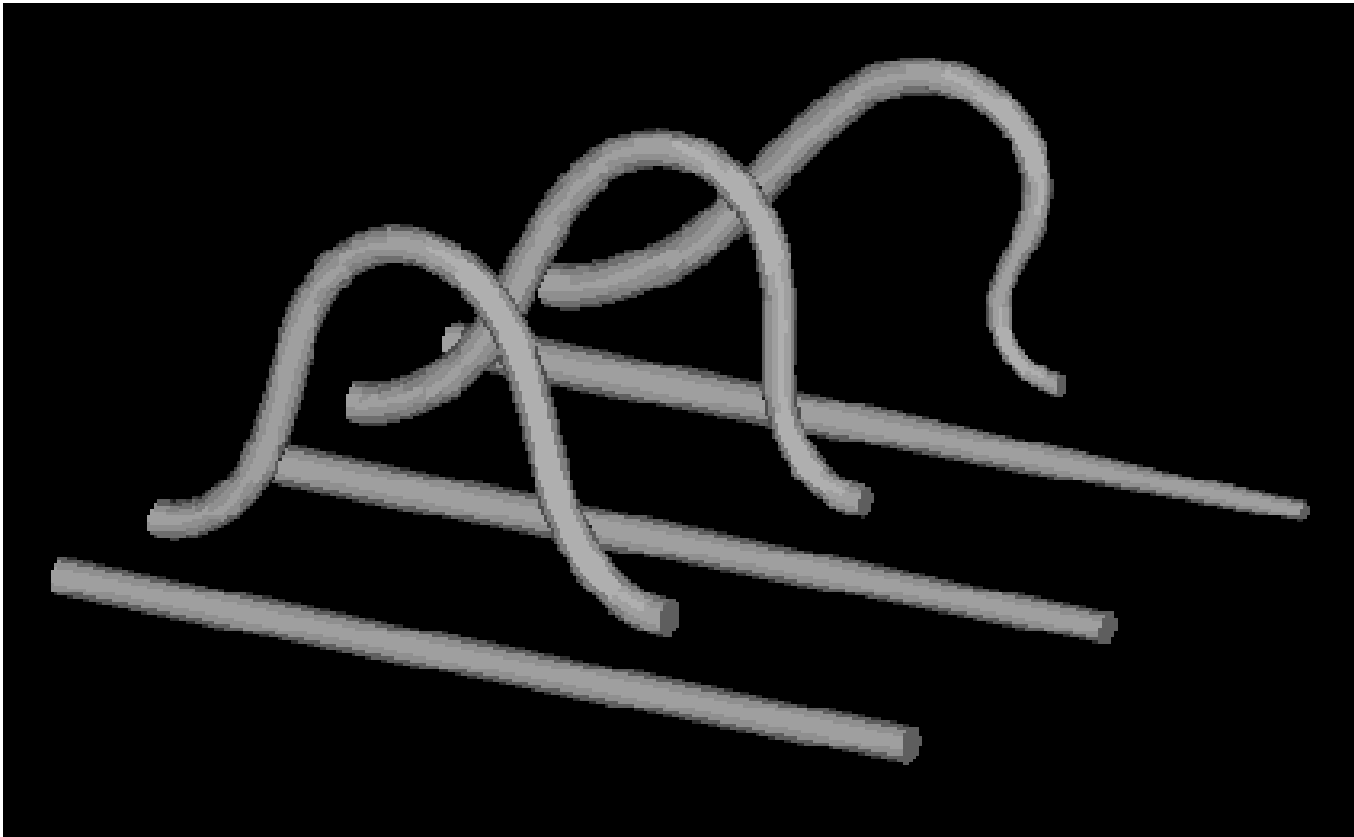
ねじり座屈 (torsional buckling, kinking)



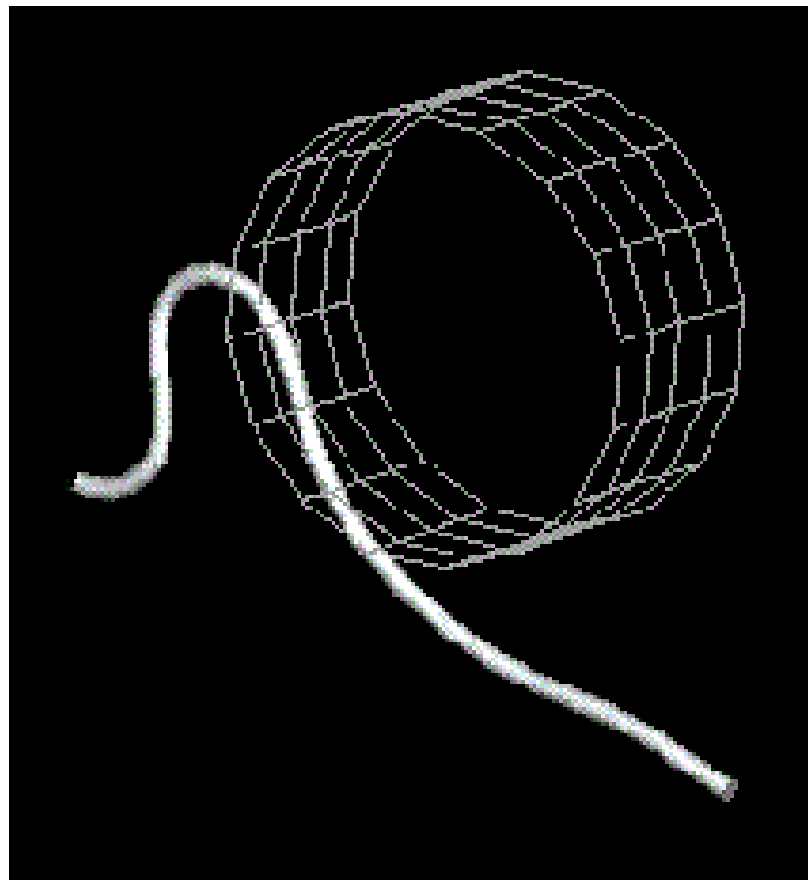
変形形状とポテンシャルエネルギーの関係②



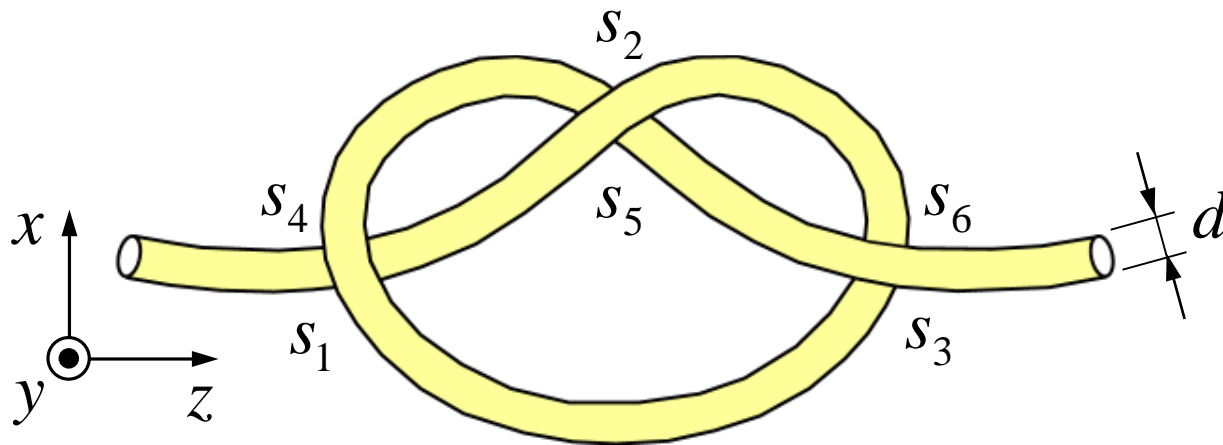
線状物体の変形形状計算例③



線状物体の変形形状計算例④



結び目形状の表現

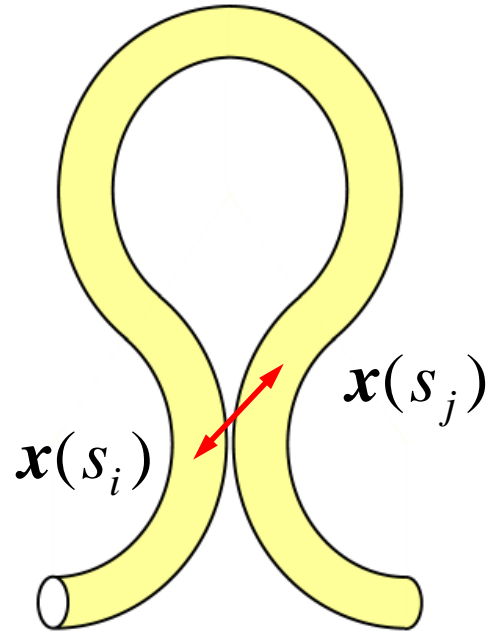


$$\int_{s_i}^{s_{i+3}} z(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\int_{s_i}^{s_{i+3}} x(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\int_{s_{i+3}}^{s_i} y(s) ds = (-1)^i d \quad (i = 1, 2, 3)$$

自己干渉回避のための制約



$$\left| \mathbf{x}(s_i) - \mathbf{x}(s_j) \right| \geq r(s_i) + r(s_j)$$
$$\forall s_i, s_j \in [0, L], \text{ subject to } \left| s_i - s_j \right| \geq r(s_i) + r(s_j)$$



変形形状の導出手法

係数ベクトル \mathbf{a} に関する最適化問題:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && U(\mathbf{a}) \\ & \text{subject to} && g_j(\mathbf{a}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, u) \\ & && h_k(\mathbf{a}) = 0 \quad (k = 1, \dots, v) \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \left[\mathbf{a}^{\phi^T} \quad \mathbf{a}^{\theta^T} \quad \mathbf{a}^{\psi^T} \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6 \right]^T$$

→交点の位置も未知数として計算





結び目形状の計算例

