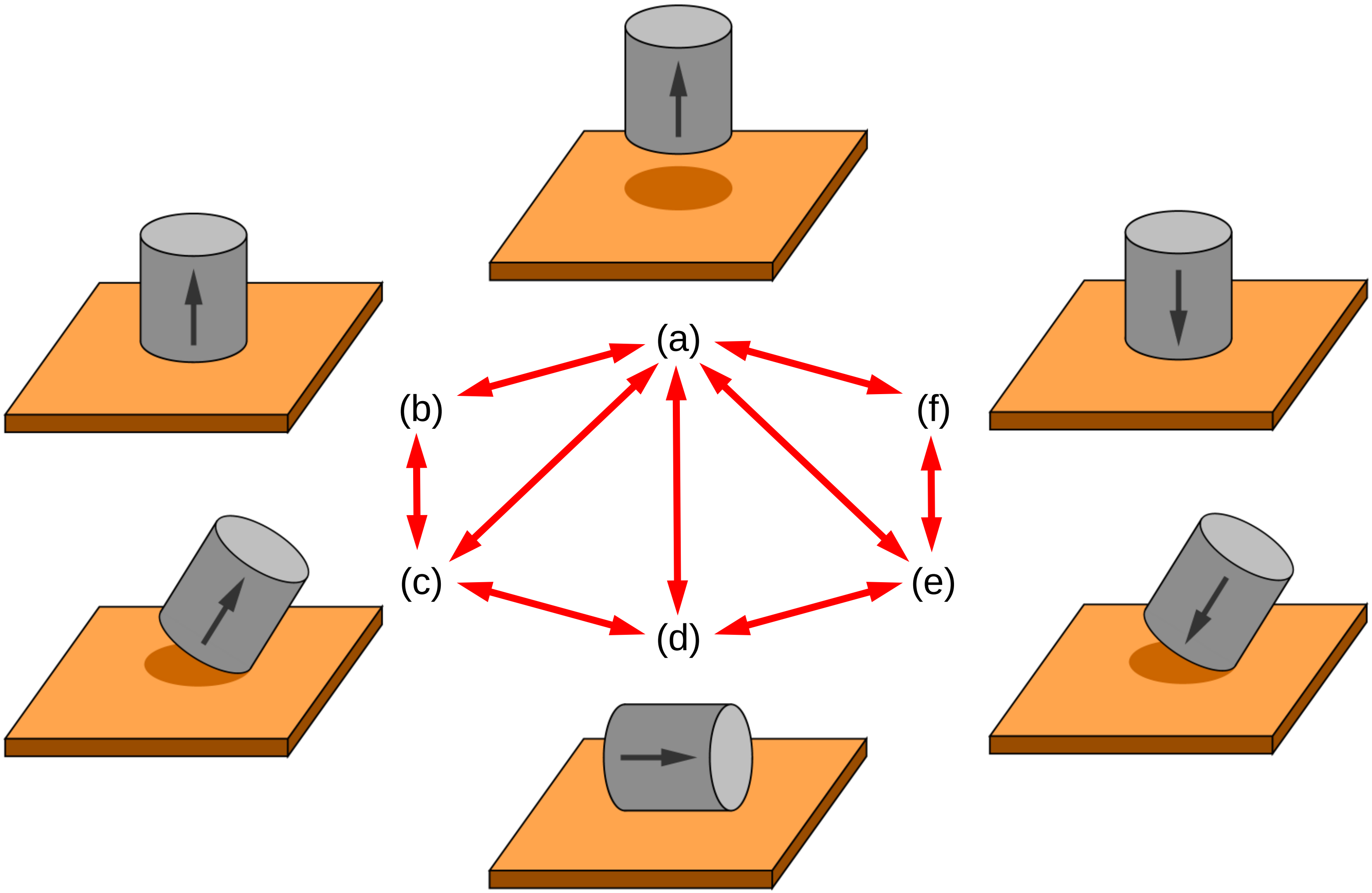
ハンドリング工学特論

大阪大学大学院 工学研究科 マテリアル生産科学専攻
システムインテグレーション講座
生産システムインテグレーション領域
若松　栄史

剛体の接触状態グラフの例



「ハンドリング過程の運動学」のまとめ

- 物体（剛体）の接触の様子は、二つの物体の構成要素の対で表すことができる→接触状態
- 接触状態が変われば、物体の可能な運動も異なる
- ハンドリング過程は有限個の接触状態とその移り変わりによってモデル化できる→接触状態グラフ

摩擦

ハンドリングと摩擦

ハンドリング過程：

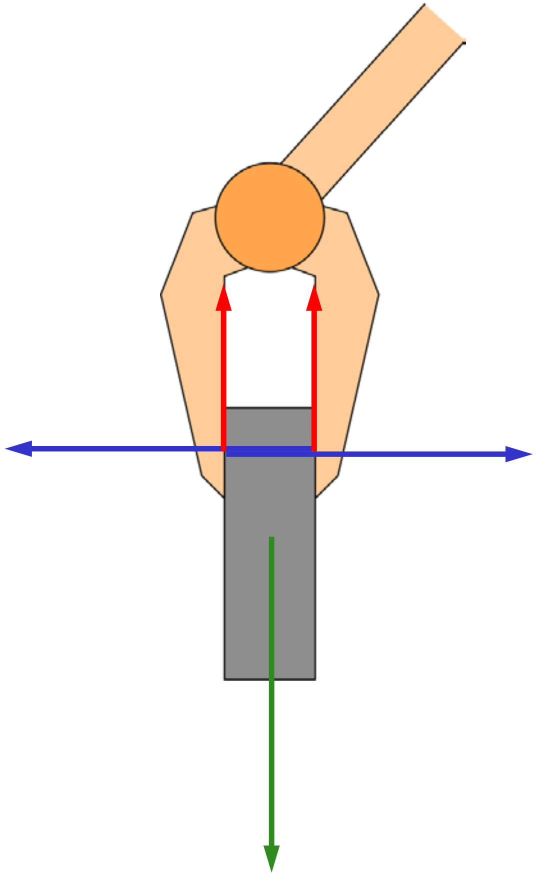
物体同士の接触状態の移り変わり

物体同士が接触→接触面に摩擦が発生

ハンドリング→摩擦を利用した操作

物体の適切なハンドリング：

摩擦の働きの理解が重要



静止摩擦と動摩擦

接触している二物体間に作用する、相対運動を妨げる力

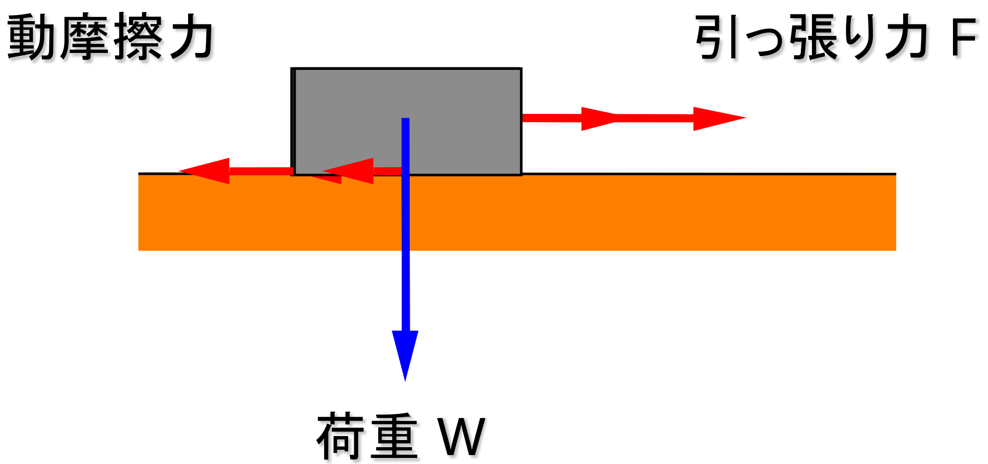
→摩擦力（friction）

物体が静止している時物体に作用する摩擦

→静止摩擦（static friction）

物体が運動している時物体に作用する摩擦

→動摩擦（kinetic friction）



摩擦係数

- 静止摩擦の場合

$$f_s = \mu_s W$$

μ_s : 最大静止摩擦係数（maximum static friction coefficient）

- 動摩擦の場合

$$f_c = \mu W$$

μ : 動摩擦係数（kinetic friction coefficient）

- 最大静止摩擦係数と動摩擦係数の関係

$$\mu_s > \mu$$

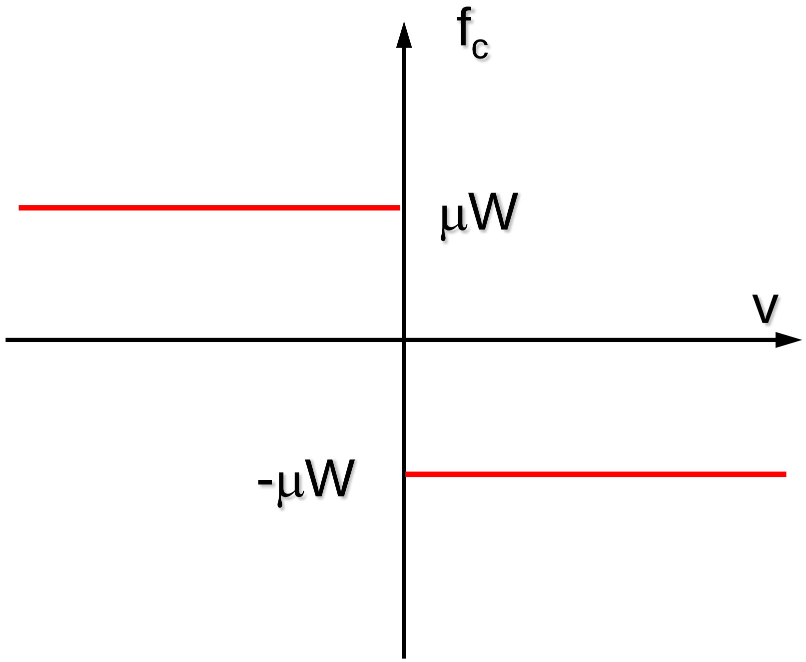
摩擦に関する経験則

クーロン・アモントン則（Coulomb-Amonton’s law）

- 摩擦力は垂直荷重に比例する
- 摩擦力は見かけの接触面積に無関係である
- 動摩擦力はすべり速度に無関係である
- 静止摩擦力は動摩擦力より大きい

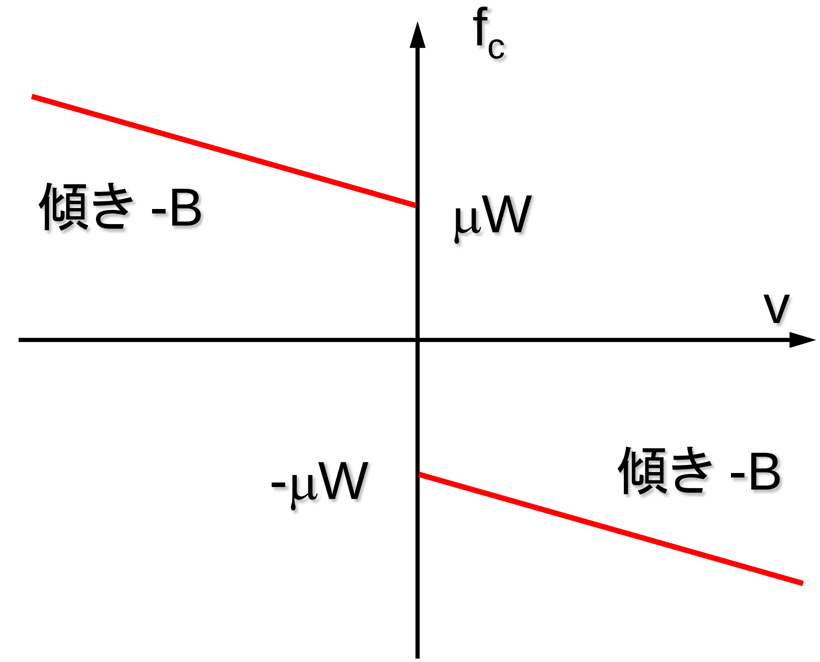
→あくまでも経験則であり、成り立たない現象も多い

速度と動摩擦力



クーロン・アモントン則

$$f_c = \begin{cases} -\mu W & (v > 0) \\ \mu W & (v < 0) \end{cases}$$

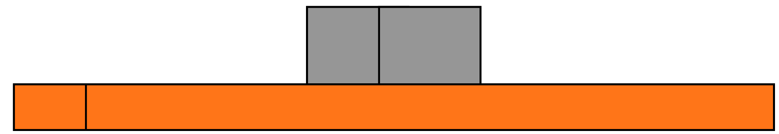


粘性摩擦

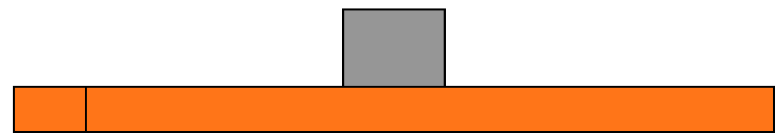
$$f_c = \begin{cases} -Bv - \mu W & (v > 0) \\ -Bv + \mu W & (v < 0) \end{cases}$$

摩擦駆動／振動輸送

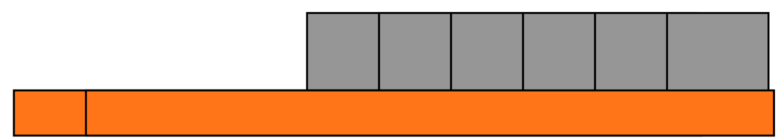
- 振動板がゆっくり前後する場合（前進／後退の加速度が小さい場合）



- 振動板がすばやく前後する場合（前進／後退の加速度が大きい場合）

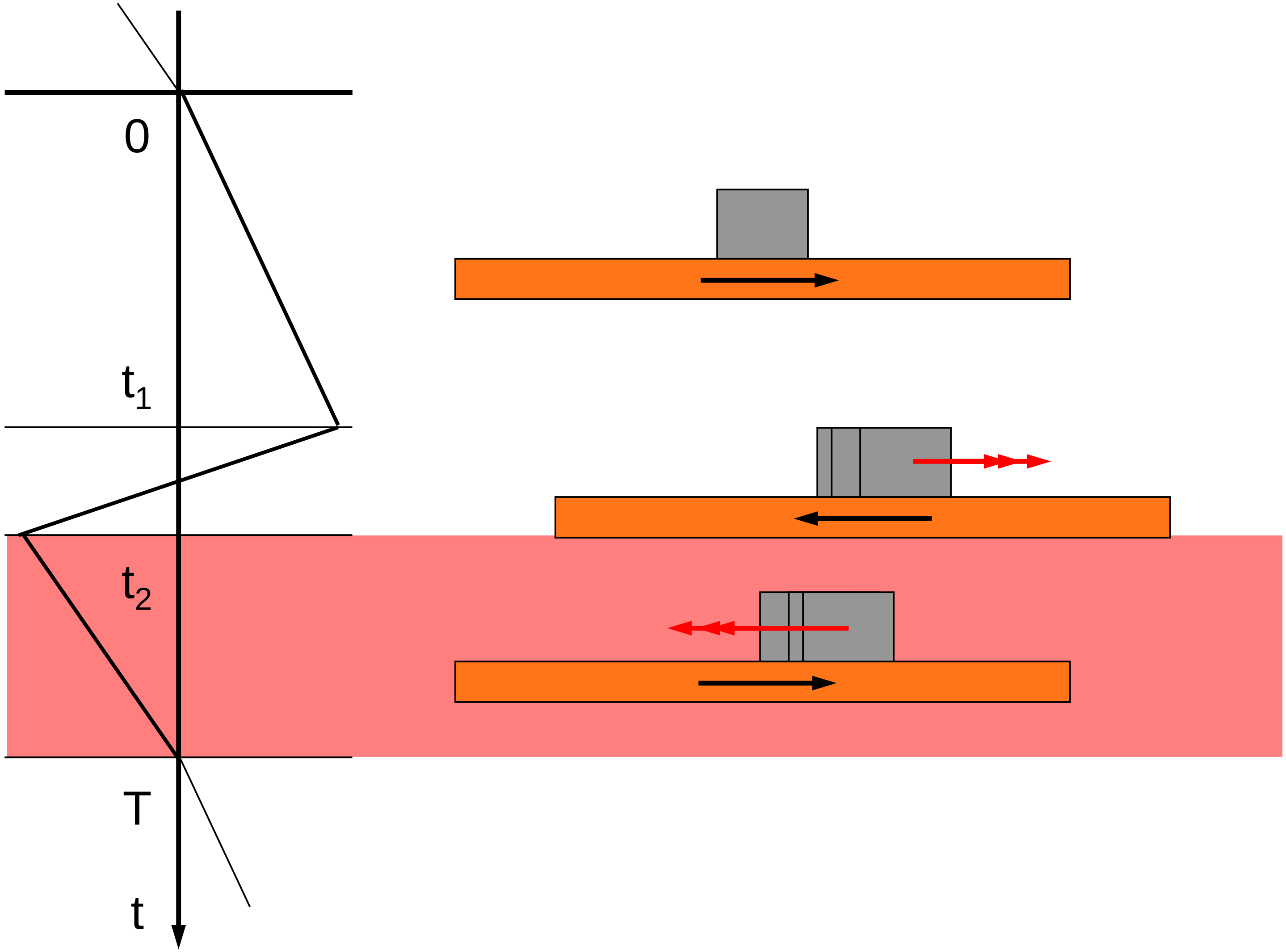


- 振動板がゆっくり進み、すばやく戻る場合（前進の加速度が小さく、後退の加速度が大きい場合）

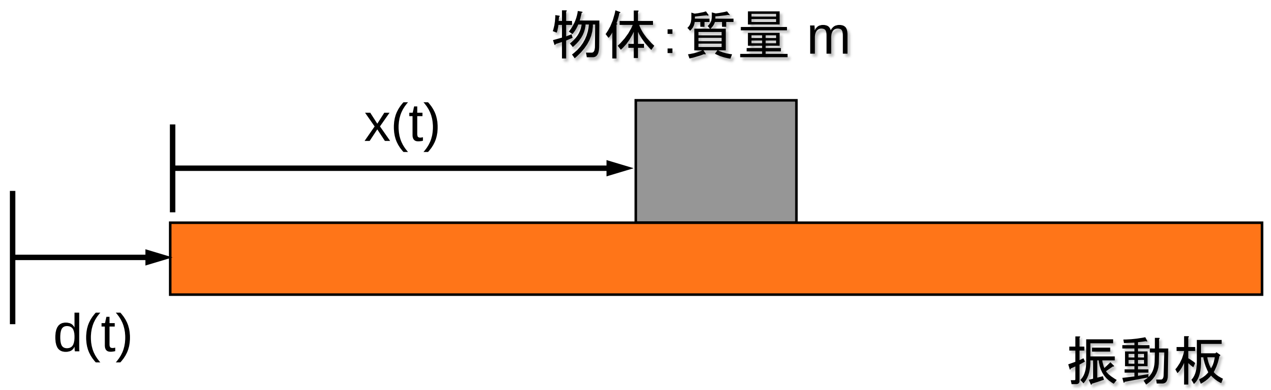


摩擦駆動の原理

- 加速期
- 減速期
- 回復期

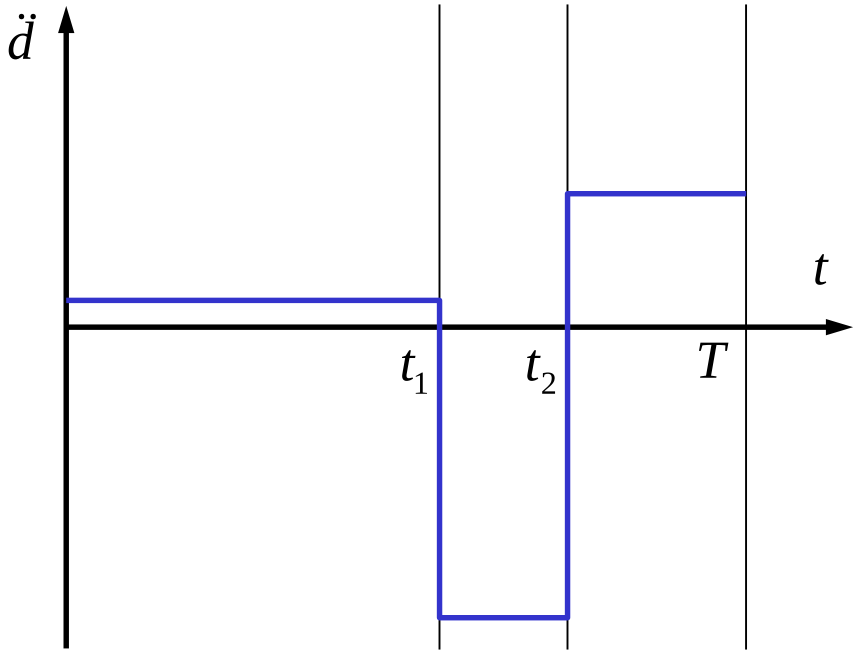


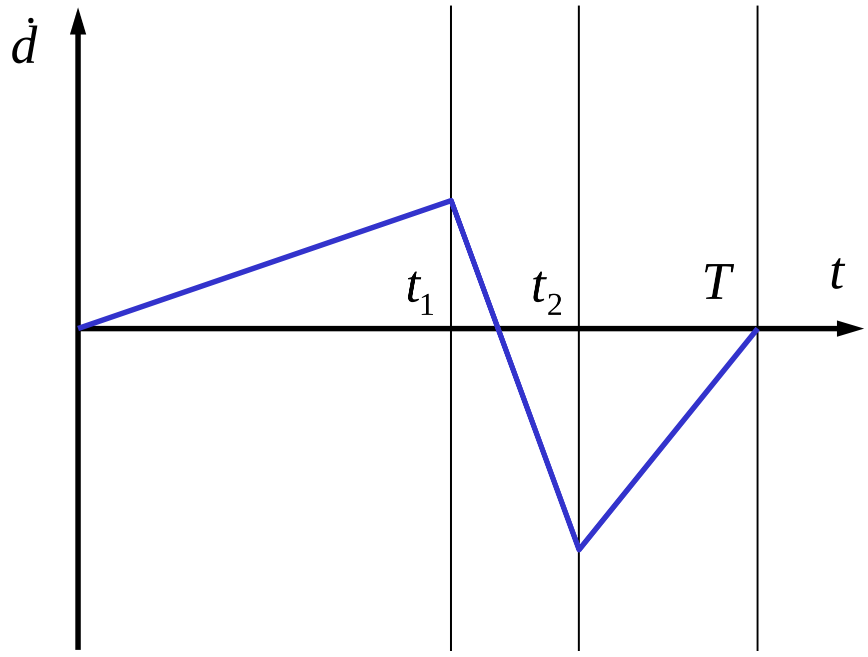
摩擦駆動モデルの座標系と作用力



物体に作用する力：慣性力$-m\ddot{d}(t)$と摩擦力

振動板の加速度と速度

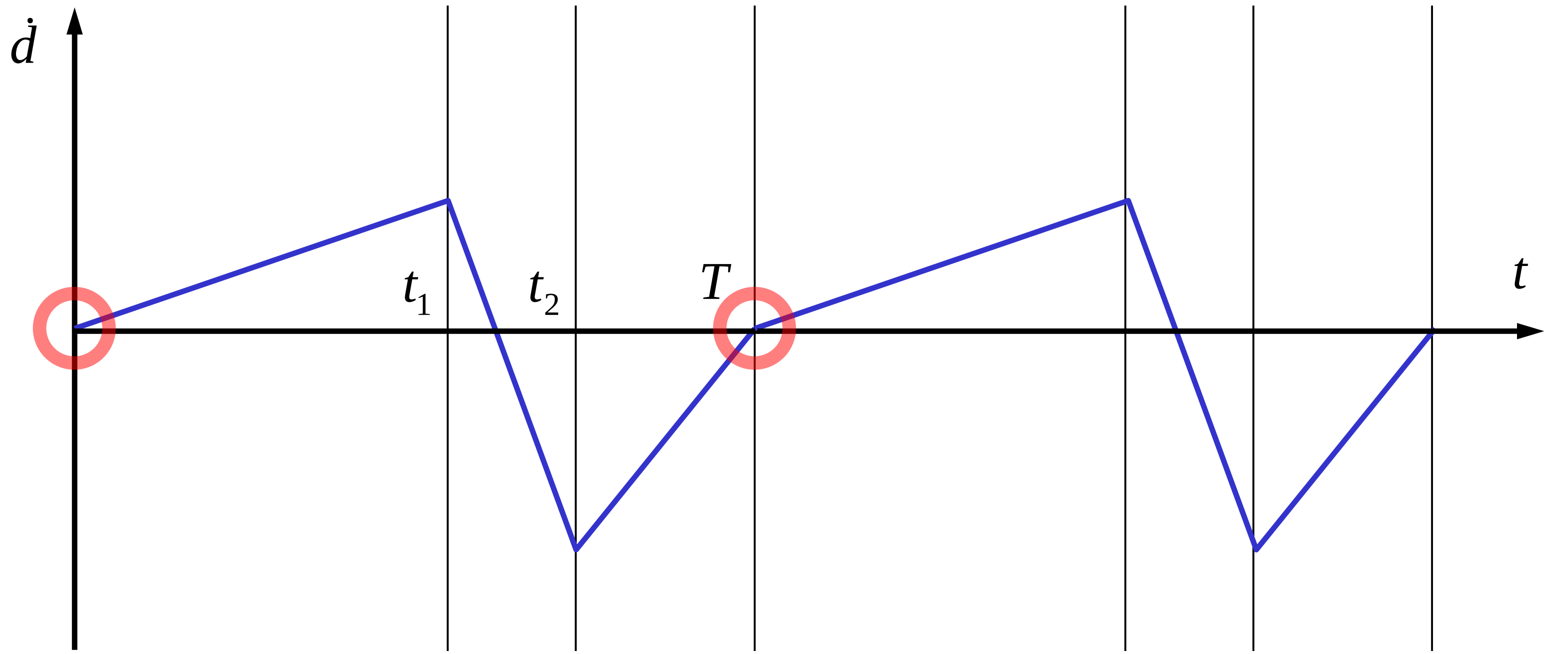




$$\ddot{d}(t) = \begin{cases} \alpha_f & (0 \le t < t_1) \\ -\alpha_b & (t_1 \le t < t_2) \\ \alpha_r & (t_2 \le t < T) \end{cases}$$

$$\dot{d}(t) = \begin{cases} \alpha_f t & (0 \le t < t_1) \\ \alpha_f t_1 - \alpha_b (t - t_1) & (t_1 \le t < t_2) \\ \alpha_f t_1 - \alpha_b (t_2 - t_1) + \alpha_r (t - t_2) & (t_2 \le t < T) \end{cases}$$

振動板の速度に関する制約

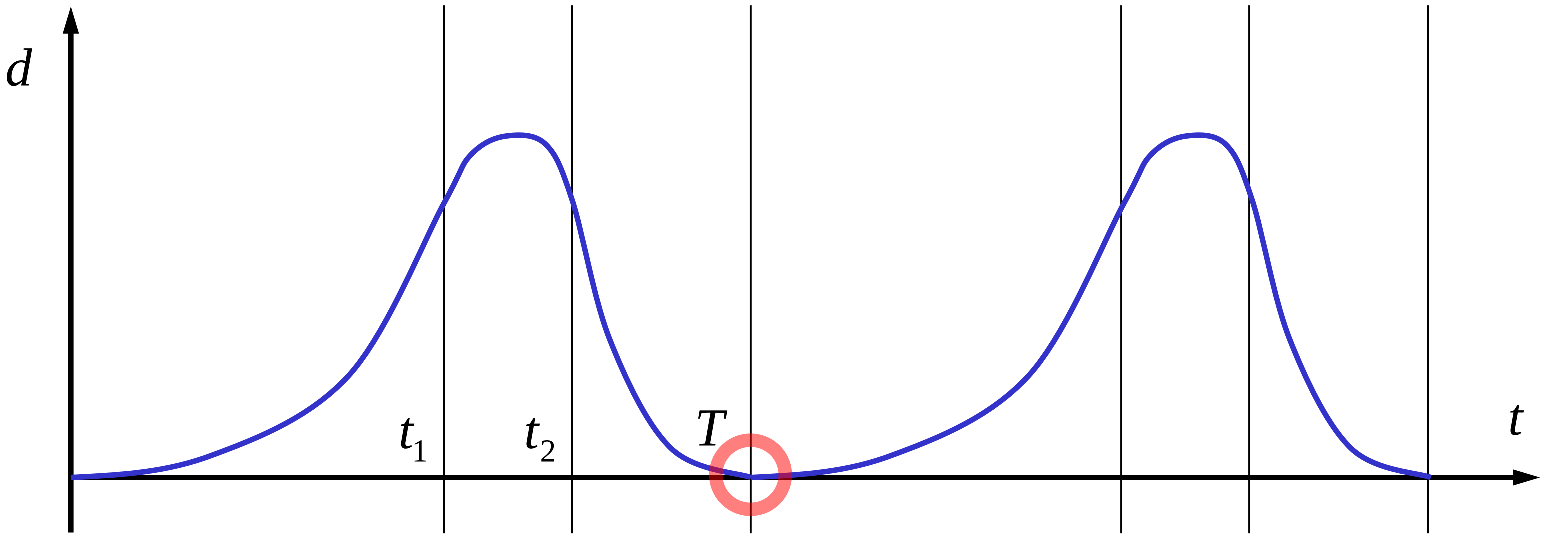


$$\dot{d}(T) = \dot{d}(0)$$

$$\alpha_f t_1 - \alpha_b (t_2 - t_1) + \alpha_r (T - t_2) = 0$$

$$\therefore \alpha_b = \frac{\alpha_f t_1 + \alpha_r (T - t_2)}{t_2 - t_1}$$

振動板の移動距離に関する制約



$$\int_0^T \dot{d}(t)\,dt = d(T) - d(0) = 0$$

$$\int_0^{t_1} \alpha_f t\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{\alpha_f t_1 - \alpha_b (t - t_1)\right\} dt + \int_{t_2}^{T} \left\{\alpha_f t_1 - \alpha_b (t_2 - t_1) + \alpha_r (t - t_2)\right\} dt = 0$$

$$\alpha_f(-t_1^{\ 2} + 2t_1 T) + \alpha_b (t_2 - t_1)(t_2 + t_1 - 2T) + \alpha_r (T - t_2)^2 = 0$$

$$\alpha_b = \frac{\alpha_f t_1 + \alpha_r (T - t_2)}{t_2 - t_1}$$ より $$\alpha_r = \frac{t_1 t_2}{(T - t_1)(T - t_2)} \alpha_f$$

加速期／減速期／回復期の加速度の関係

減速期の加速度:

$$\alpha_b = \frac{t_1(T - t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(T - t_1)}\alpha_f$$

回復期の加速度:

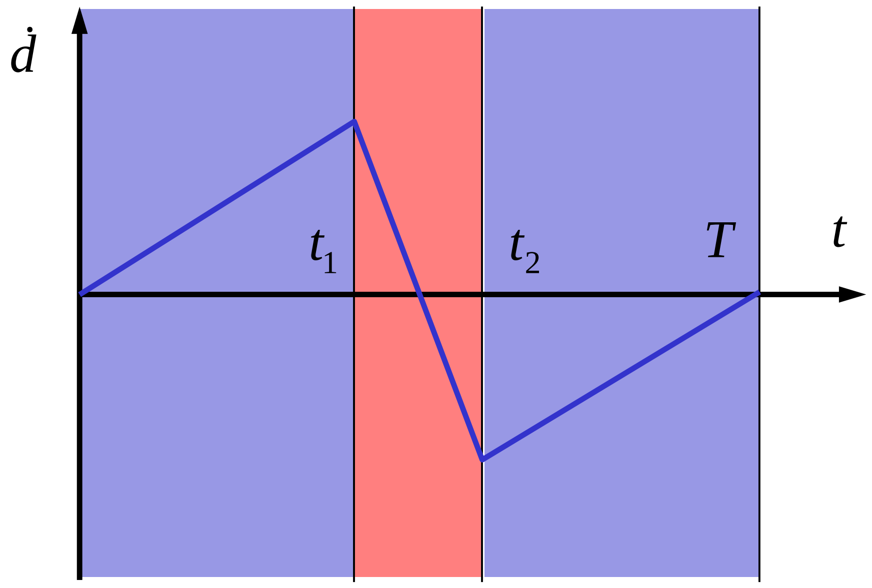
$$\alpha_r = \frac{t_1 t_2}{(T - t_1)(T - t_2)}\alpha_f$$

加速期と回復期の加速度が等しい場合

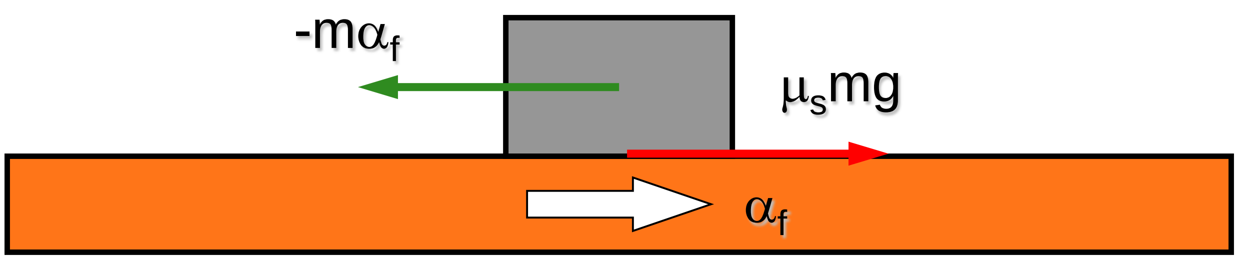
$$\alpha_r = \frac{t_1 t_2}{(T-t_1)(T-t_2)}\alpha_f \quad \text{より} \quad \frac{t_1 t_2}{(T-t_1)(T-t_2)} = 1 \qquad \therefore T\{T-(t_1+t_2)\} = 0$$

$$T \neq 0 \quad \text{なので} \quad T-(t_1+t_2) = 0 \qquad \therefore t_1 = T - t_2$$

$$\text{この時} \quad \alpha_b = \frac{\boxed{2t_1}}{\boxed{t_2 - t_1}}\alpha_f$$



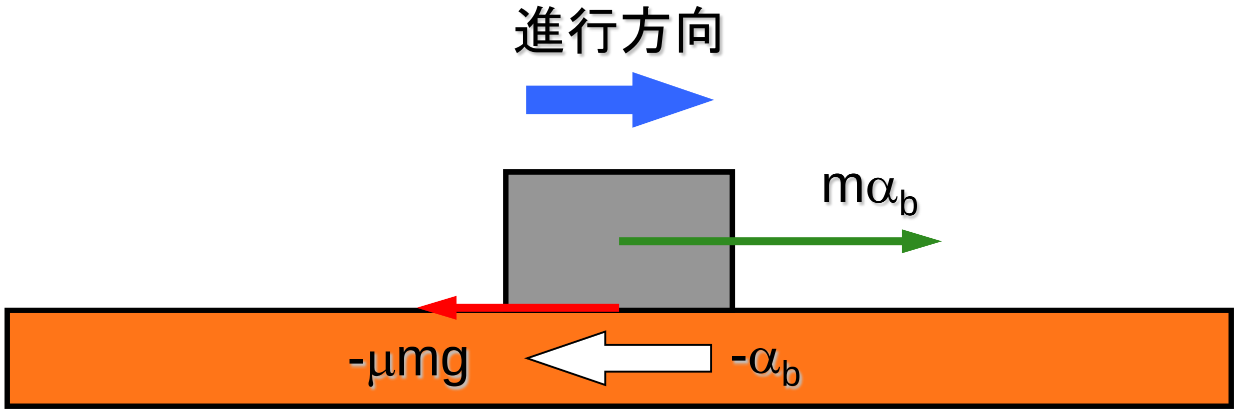
物体の速度① ～加速期～



加速期には物体は滑らないので　$m\alpha_f < \mu_s mg$　　$\therefore \alpha_f < \mu_s g$

$$\dot{x}(t) = 0 \quad (0 \le t < t_1)$$

物体の速度② ～減速期～



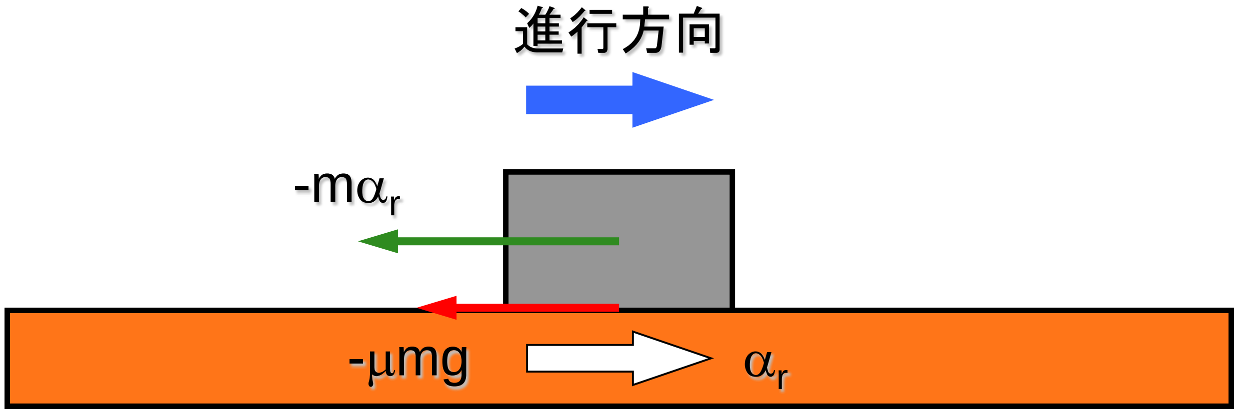
減速期には物体は滑るので　$m\alpha_b > \mu_s mg$　　$\therefore \alpha_b > \mu_s g$

$$f = m\alpha_b - \mu mg = m\ddot{x}(t) \text{ より}$$

$$\ddot{x}(t) = \alpha_b - \mu g \quad (t_1 \le t < t_2)$$

$$\dot{x}(t) = (\alpha_b - \mu g)(t - t_1) \quad (t_1 \le t < t_2)$$

物体の速度③ ～回復期～



$$f = -m\alpha_r - \mu mg = m\ddot{x}(t)$$ より

$$\ddot{x}(t) = -\alpha_r - \mu g \quad (t_2 \le t < T)$$

$$\dot{x}(t) = (\alpha_b - \mu g)(t_2 - t_1) - (\alpha_r + \mu g)(t - t_2) \quad (t_2 \le t < T)$$

回復期における物体の速度は常に正であると仮定

$$\dot{x}(T) = (\alpha_b - \mu g)(t_2 - t_1) - (\alpha_r + \mu g)(T - t_2) > 0$$

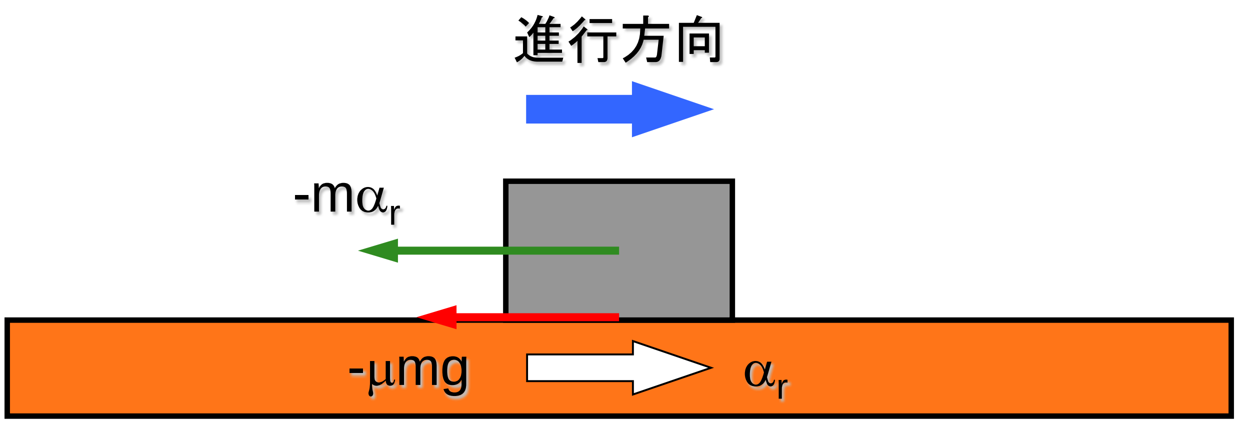
物体の速度③ ～回復期～

$$\dot{x}(T) = (\alpha_b - \mu g)(t_2 - t_1) - (\alpha_r + \mu g)(T - t_2) > 0$$

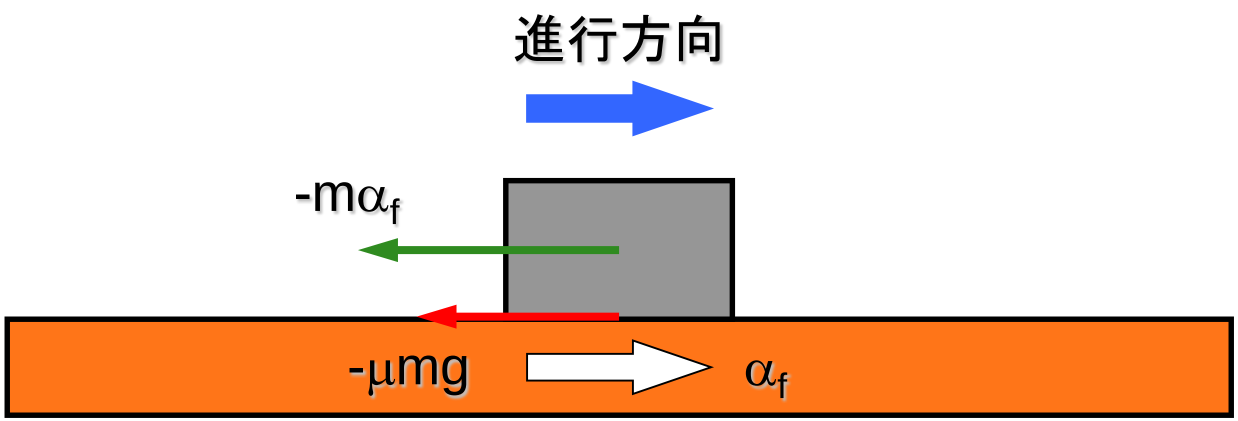
$$\alpha_b = \frac{t_1(T - t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(T - t_1)}\alpha_f \quad 、\alpha_r = \frac{t_1 t_2}{(T - t_1)(T - t_2)}\alpha_f$$ より

$$\dot{x}(T) = \alpha_f t_1 - \mu g(T - t_1)$$

$\therefore \alpha_f t_1 > \mu g(T - t_1)$ であれば仮定が成り立つ



物体の速度④ ～次周期の加速期～



$$f = -m\alpha_f - \mu mg = m\ddot{x}(t) \quad \text{より}$$

$$\ddot{x}(t) = -\alpha_f - \mu g \quad (T \le t < T + t_1)$$

$$\dot{x}(t) = \alpha_f t_1 - \mu g(T - t_1) - (\alpha_f + \mu g)(t - T) \quad (T \le t < T + t_1)$$

$$\dot{x}(T + t_1) = -\mu g T < 0$$

加速期の途中で物体は静止する

振動板の各加速度に関する制約

減速期の加速度: $\alpha_b = \dfrac{t_1(T - t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(T - t_1)}\alpha_f$

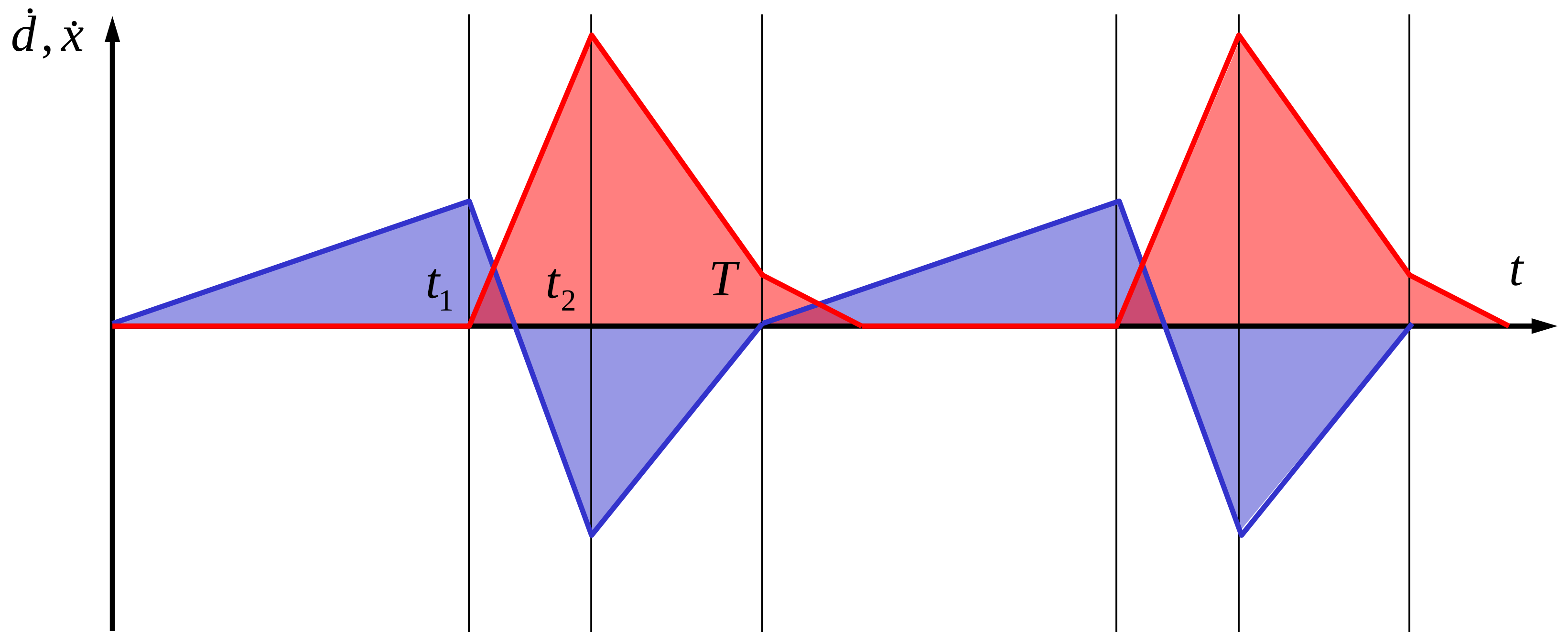
回復期の加速度: $\alpha_r = \dfrac{t_1 t_2}{(T - t_1)(T - t_2)}\alpha_f$

前提1:加速期には物体は滑らない → $\alpha_f < \mu_s g$

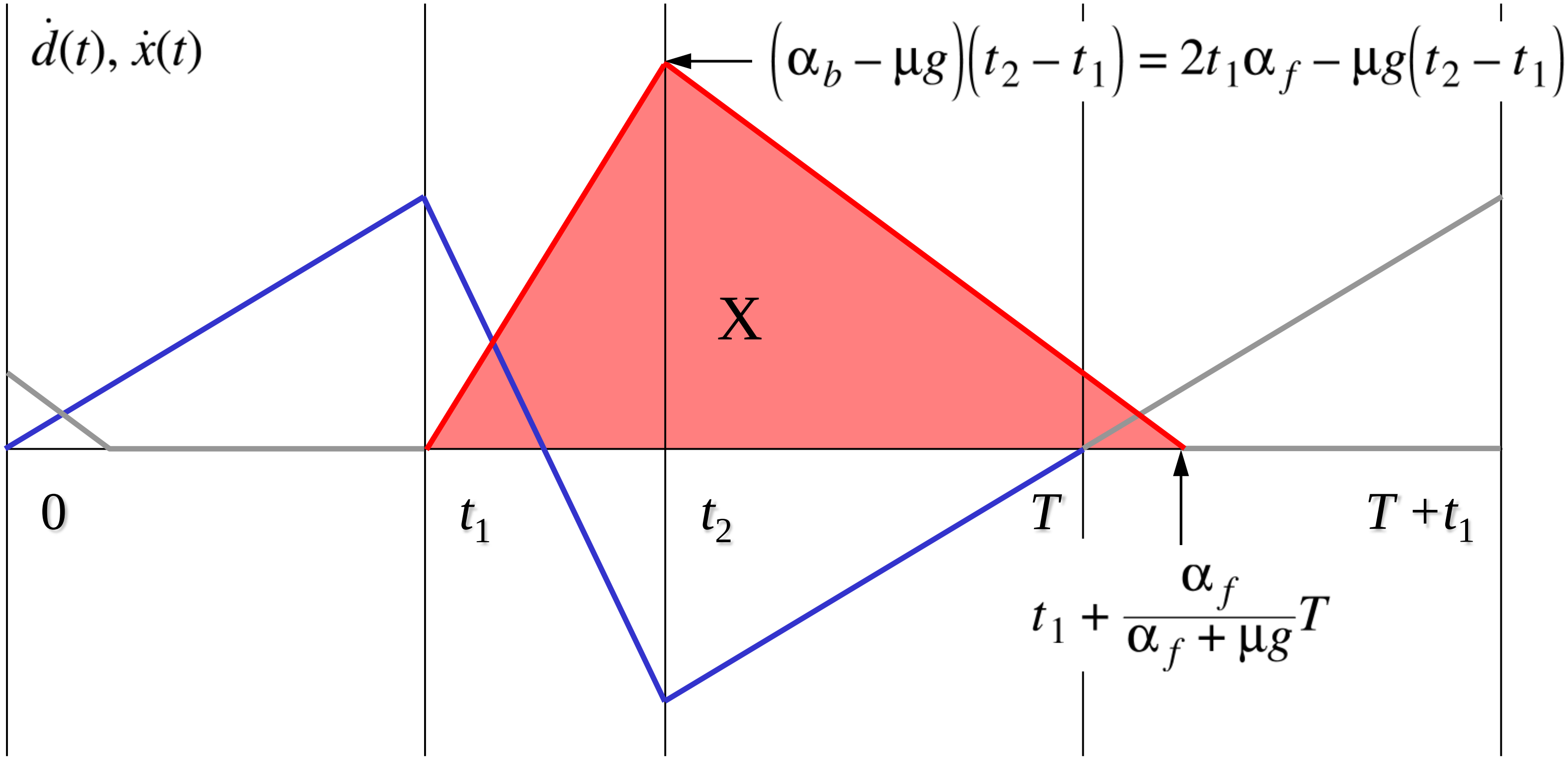
前提2:減速期には物体は滑る → $\alpha_b = \dfrac{t_1(T - t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(T - t_1)}\alpha_f > \mu_s g$

前提3:回復期終了時にも物体は滑っている → $\alpha_f t_1 > \mu g(T - t_1)$

振動板の速度と物体の速度



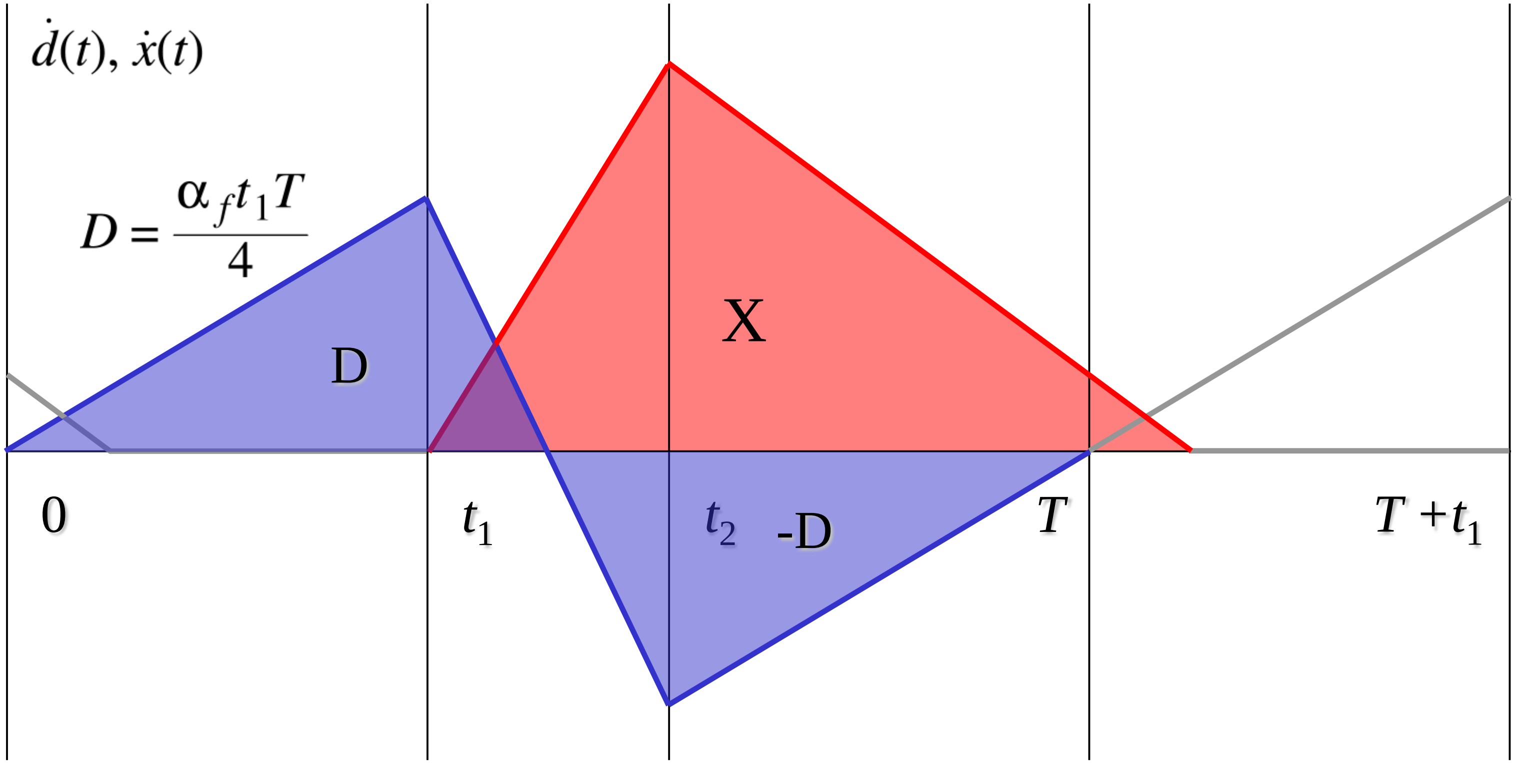
物体の移動量 ～加速期と回復期の加速度が等しい場合～



一周期あたりの物体移動量:

$$X = \frac{1}{2}\left\{2t_1\alpha_f - \mu g(t_2 - t_1)\right\}\frac{\alpha_f}{\alpha_f + \mu g}T$$

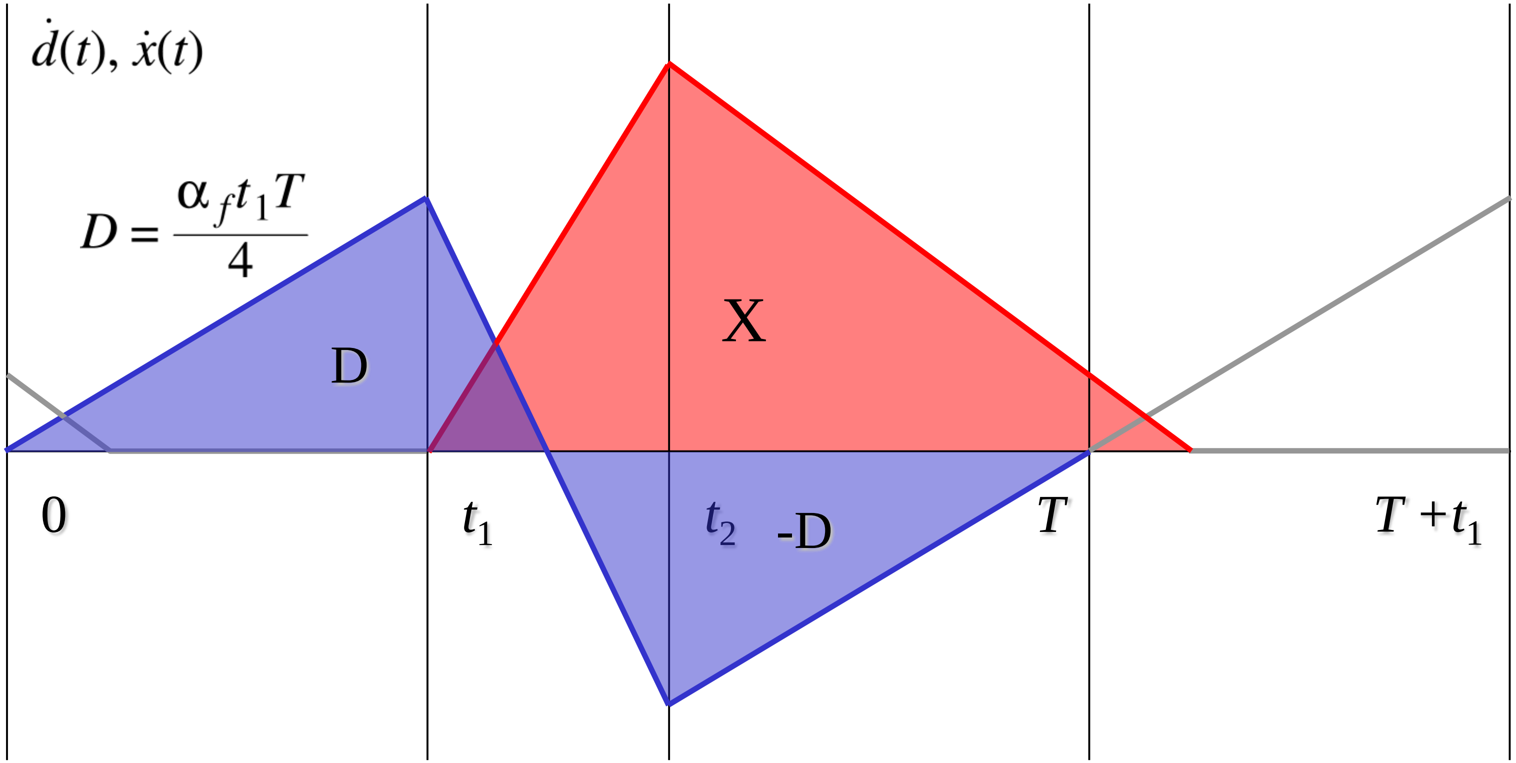
物体の移動量 ～加速期と回復期の加速度が等しい場合～



D=1[cm], T=1[s], t_1=0.4[s], t_2=0.6[s], μ=0.5, g=9.8とすると

$$X = \frac{1}{2}\left(2\times0.4\times10 - 0.5\times9.8\times0.2\right)\frac{10}{10+0.5\times9.8}$$

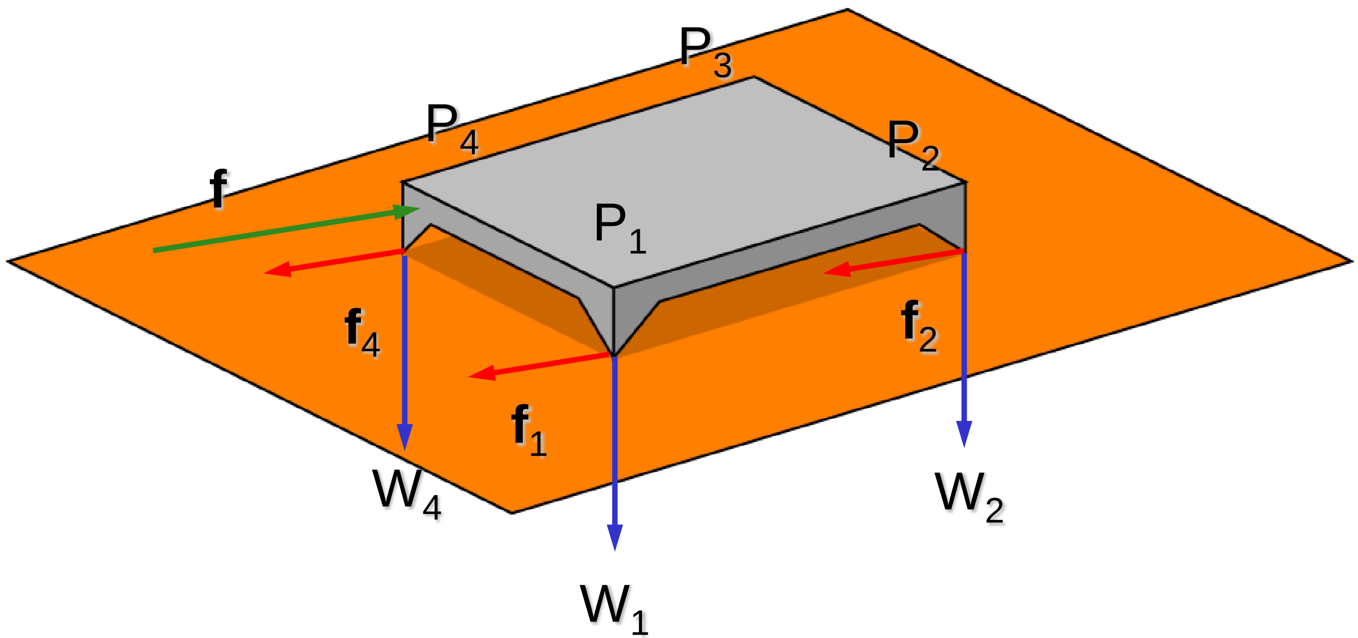
物体の移動量 ～加速期と回復期の加速度が等しい場合～



D=1[cm], T=1[s], t_1=0.4[s], t_2=0.6[s], μ=0.5, g=9.8とすると

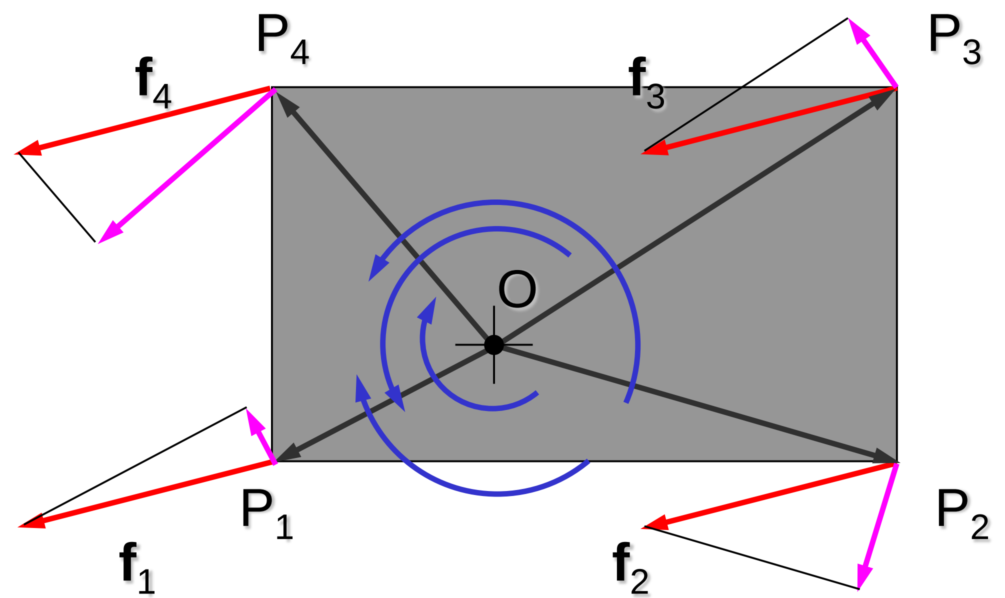
$X \fallingdotseq 2.4$ [cm/s] →移動速度を制御することが可能

摩擦中心



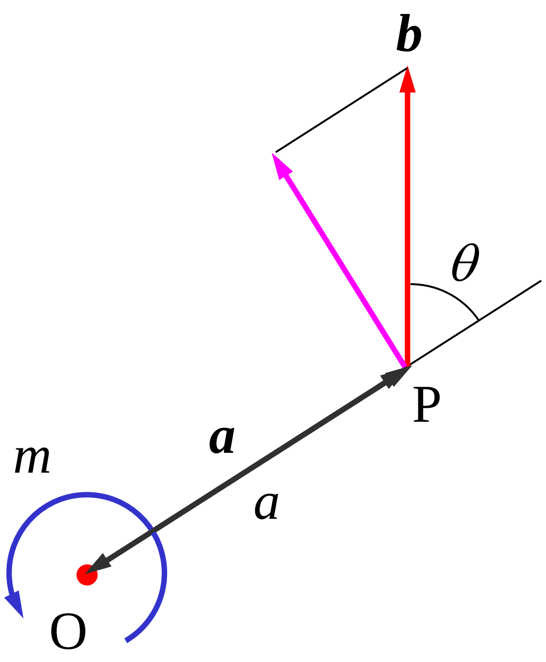
物体を回転させることなく押すためには？

摩擦中心②



摩擦力によるモーメントが0となる点→摩擦中心（friction center）

補足：モーメントと外積



$$m = a \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\theta = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\theta = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & 0 \\ b_y & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 0 & a_x \\ 0 & b_x \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

$$= \left(a_x b_y - a_y b_x\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore m = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = a_x b_y - a_y b_x$$

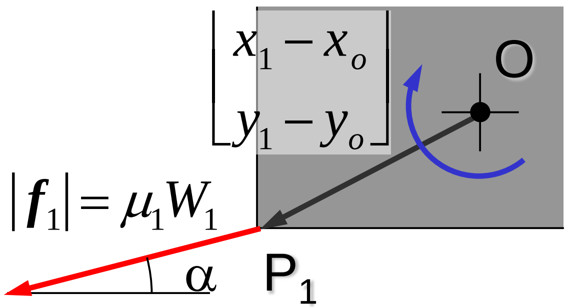
摩擦中心の座標

点$[x_o, y_o]^T$まわりのモーメント:

$$M(\alpha) = \sum_{k=1}^{4}\left(\cancel{\begin{bmatrix} x_k - x_o \\ y_k - y_o \end{bmatrix} \times -\mu_k W_k \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{4}\left\{-\sin\alpha \cdot \mu_k W_k (x_k - x_o) + \cos\alpha \cdot \mu_k W_k (y_k - y_o)\right\}$$

$$= (-\sin\alpha)\sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k (x_k - x_o) + \cos\alpha \sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k (y_k - y_o)$$



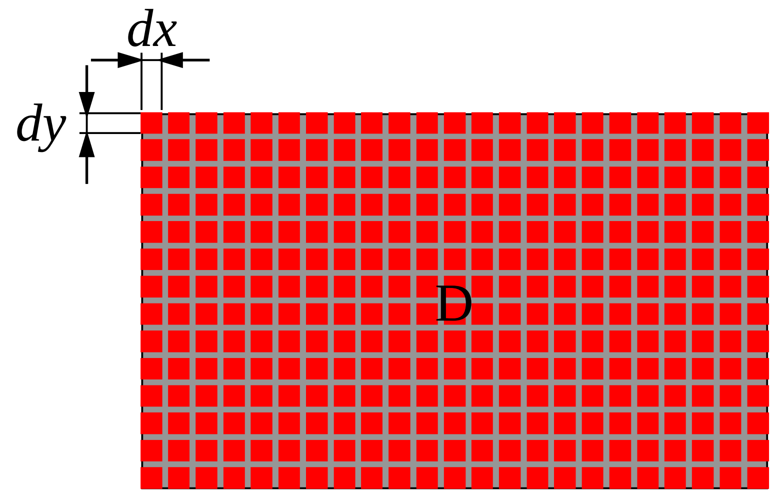
αに関わらず点$[x_o, y_o]^T$まわりのモーメントが0になるためには

$$\sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k (x_k - x_o) = 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k (y_k - y_o) = 0$$

したがって $x_o = \dfrac{1}{W_\mu}\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k x_k$ 、 $y_o = \dfrac{1}{W_\mu}\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k y_k$ 、ただし $W_\mu = \displaystyle\sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k$

→摩擦中心の座標

領域で接触する場合の摩擦中心



$$x_o = \frac{1}{W_\mu}\sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k x_k$$

$$y_o = \frac{1}{W_\mu}\sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k y_k$$

$$W_\mu = \sum_{k=1}^{4}\mu_k W_k$$

$$x_o = \frac{1}{W_\mu}\iint_D \mu(x,y)W(x,y)x\,dx\,dy$$

$$y_o = \frac{1}{W_\mu}\iint_D \mu(x,y)W(x,y)y\,dx\,dy$$

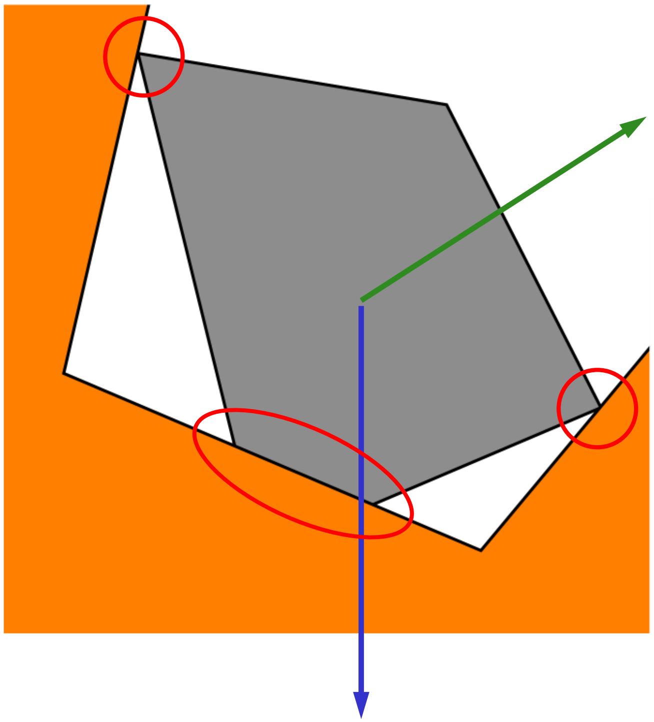
$$W_\mu = \iint_D \mu(x,y)W(x,y)\,dx\,dy$$

摩擦錐

クーロン・アモントン則：

- 垂直荷重と静止摩擦力の大きさの関係を記述
- 力の方向は記述されない

→多点接触の解析が煩雑になる



力の方向を容易に考慮できる

静止摩擦の図的表現を導入