ハンドリング工学特論

大阪大学大学院 工学研究科 マテリアル生産科学専攻
システムインテグレーション講座
生産システムインテグレーション領域
若松　栄史

剛体の運動

剛体の平面運動

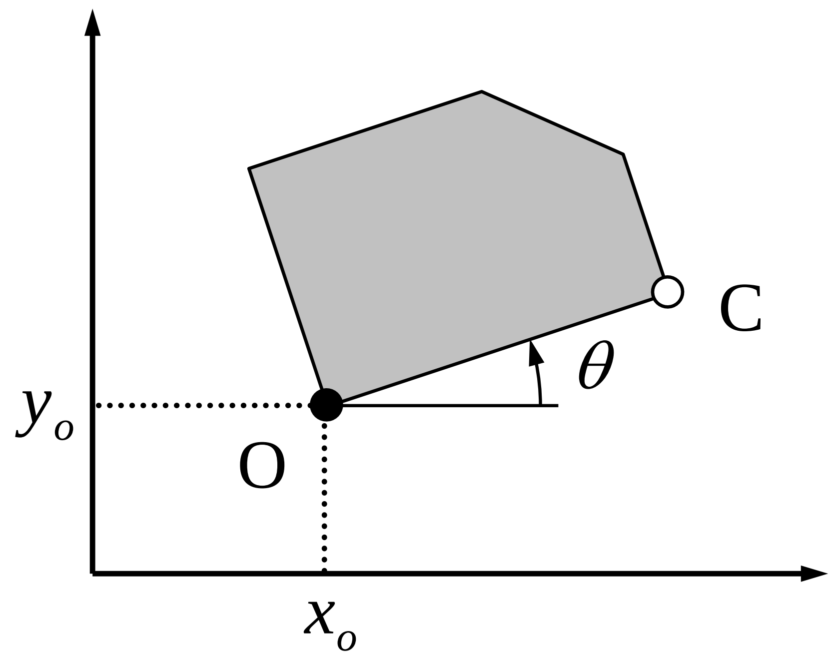
- 剛体がある平面内を運動する時、剛体は平面運動（planar motion）をするという。

- 平面運動を解析する時には、剛体の形状として剛体と平面との接触領域を考えればよい

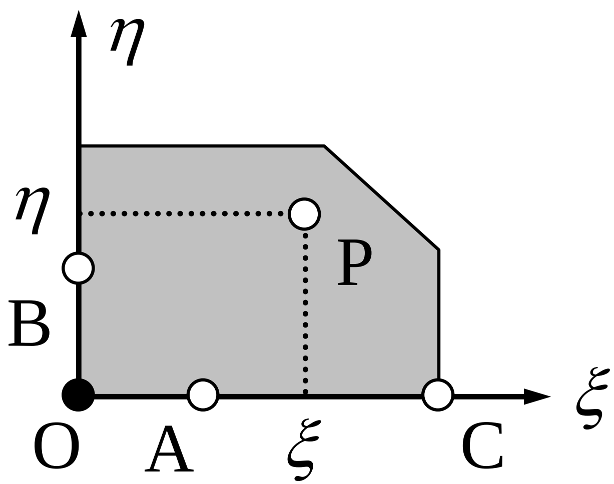
  → 平面物体（planar object）

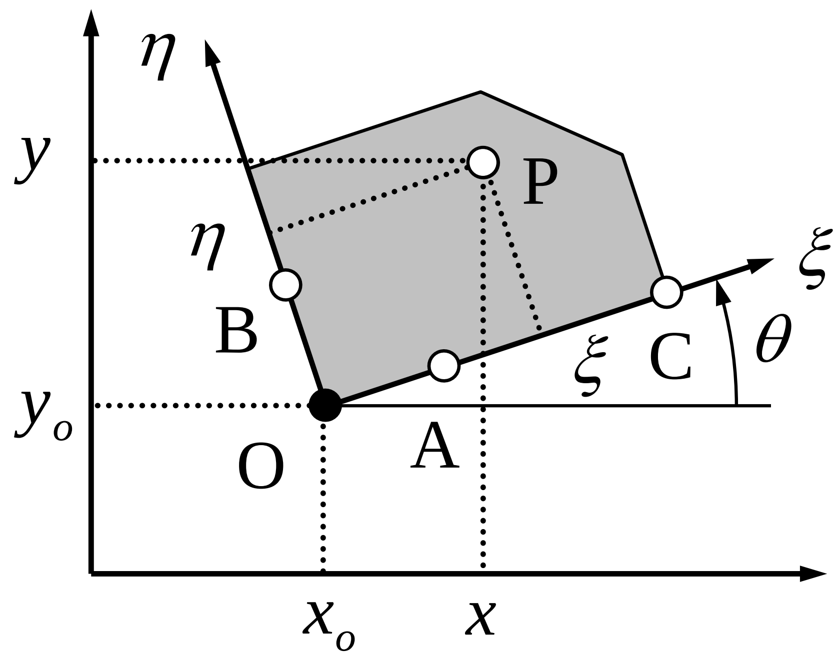
- 剛体の位置は、参照点Oの座標により表すことができる。

- 剛体の姿勢は、x軸と直線OCとのなす角により表すことができる。



平面物体の位置と姿勢①





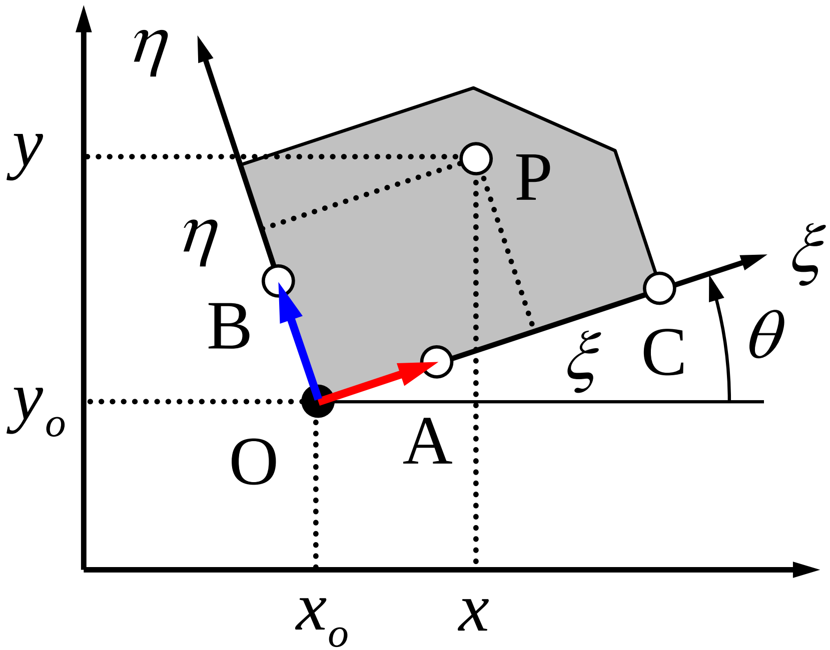
物体座標系
（body coordinates frame）

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \xi\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \eta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

空間座標系
（space coordinates frame）

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \xi\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \eta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

平面物体の位置と姿勢②



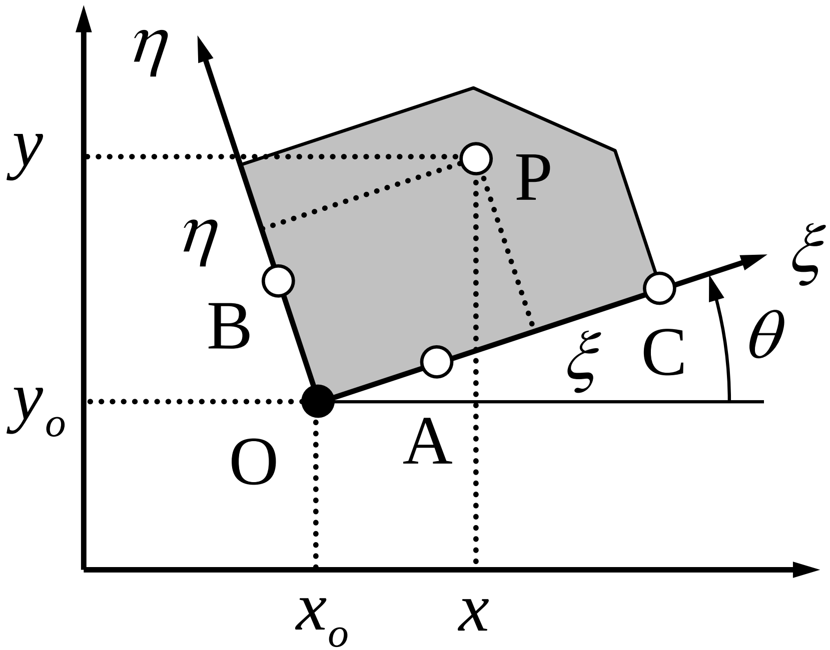
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \xi \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \eta \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi\cos\theta - \eta\sin\theta \\ \xi\sin\theta + \eta\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

平面物体の位置と姿勢③



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

回転行列
（rotational matrix）

物体座標成分から空間座標成分への変換 ← $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_o + R(\theta)\boldsymbol{\xi}$

回転行列の特徴

回転行列: $R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

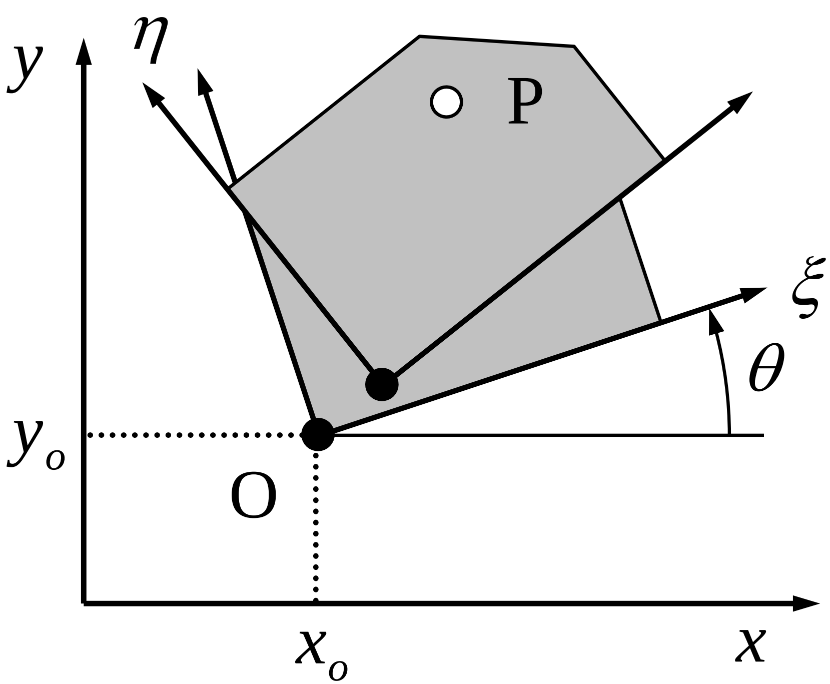
$$R(\theta)^{-1}=R(-\theta)=R(\theta)^T$$

$$R(\theta)^{-1}=\frac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$R^{-1}R=RR^{-1}=I$ より $R^TR=RR^T=I$

平面物体の速度と角速度①



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-\sin\theta)\dot{\theta} & (-\cos\theta)\dot{\theta} \\ (\cos\theta)\dot{\theta} & (-\sin\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{x}_o = v_{ox}, \quad \dot{y}_o = v_{oy}, \quad \dot{\theta} = \omega$ とおくと

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

平面物体の速度と角速度②

速度を空間座標系での変数のみで表すと

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + R(\theta)\xi \quad \text{より} \quad \xi = R(\theta)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}$$

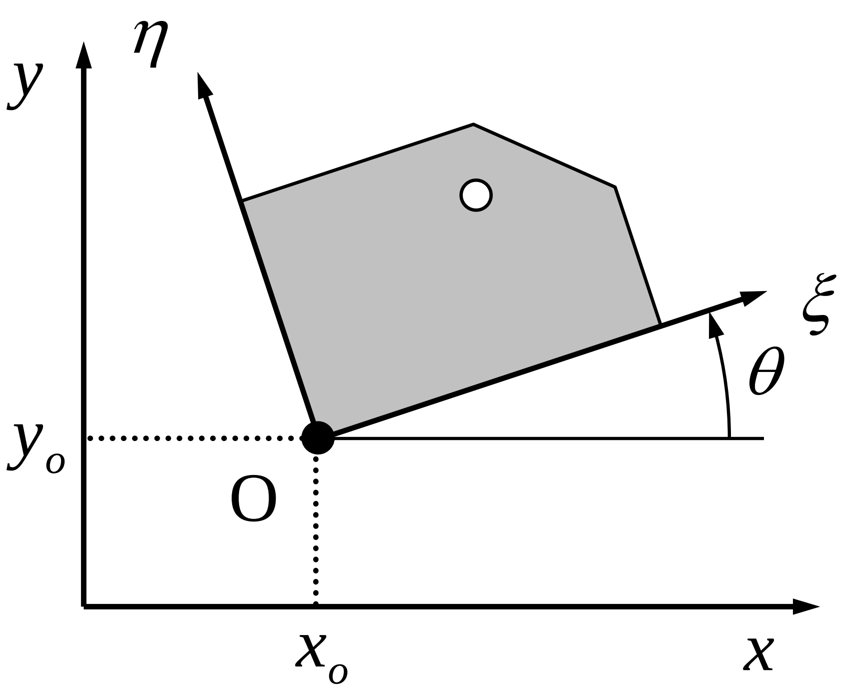
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{に代入して}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -(y - y_o) \\ x - x_o \end{bmatrix}$$

平面物体の速度と角速度③

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -(y - y_o) \\ x - x_o \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_o = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\omega(y - y_o) \\ \omega(x - x_o) \end{bmatrix} = \omega \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}$$

スカラーと2次元ベクトルの外積

とおくと、上式は以下のようになる。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

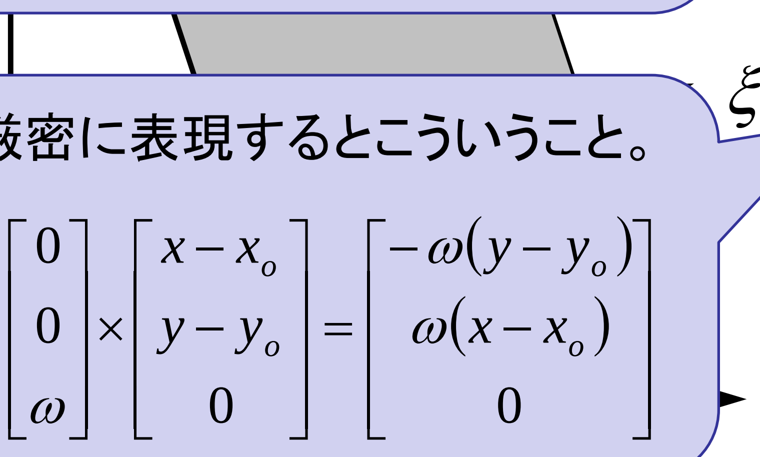
平面物体の速度と角速度④

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -(y - y_o) \\ x - x_o \end{bmatrix}$$

ここは重要。一般的には、外積はベクトル同士でしか定義されない。ただし、後で出てくる空間運動での表現と統一するために、このように定義する。

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_o = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\omega(y - y_o) \\ \omega(x - x_o) \end{bmatrix} = \omega \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}$$



厳密に表現するとこういうこと。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega(y - y_o) \\ \omega(x - x_o) \\ 0 \end{bmatrix}$$

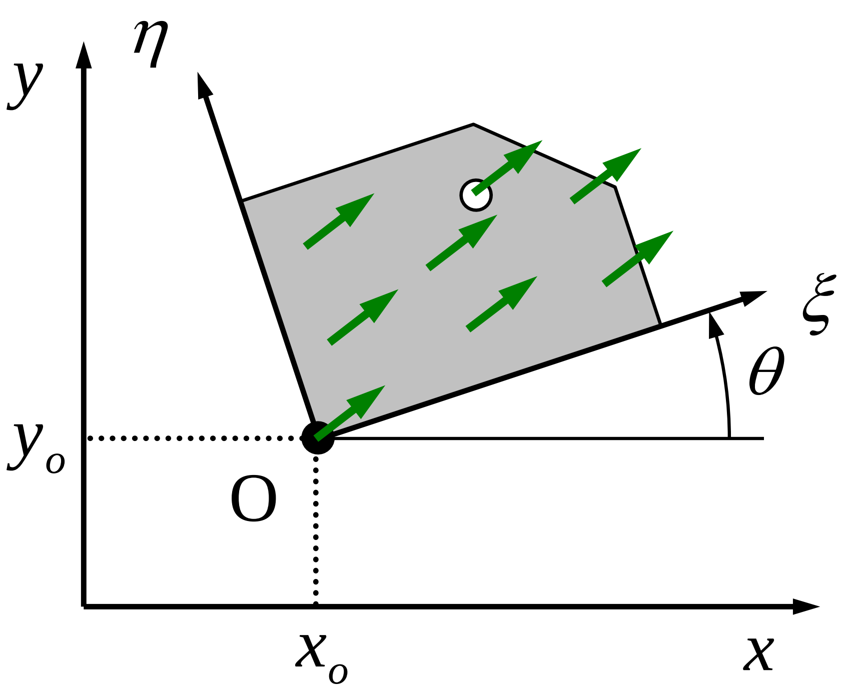
スカラーと2次元ベクトルの外積

とおくと、上式は以下のようになる。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

平面物体の速度と角速度⑤

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -(y - y_o) \\ x - x_o \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_o = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\omega(y - y_o) \\ \omega(x - x_o) \end{bmatrix} = \omega \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}$$

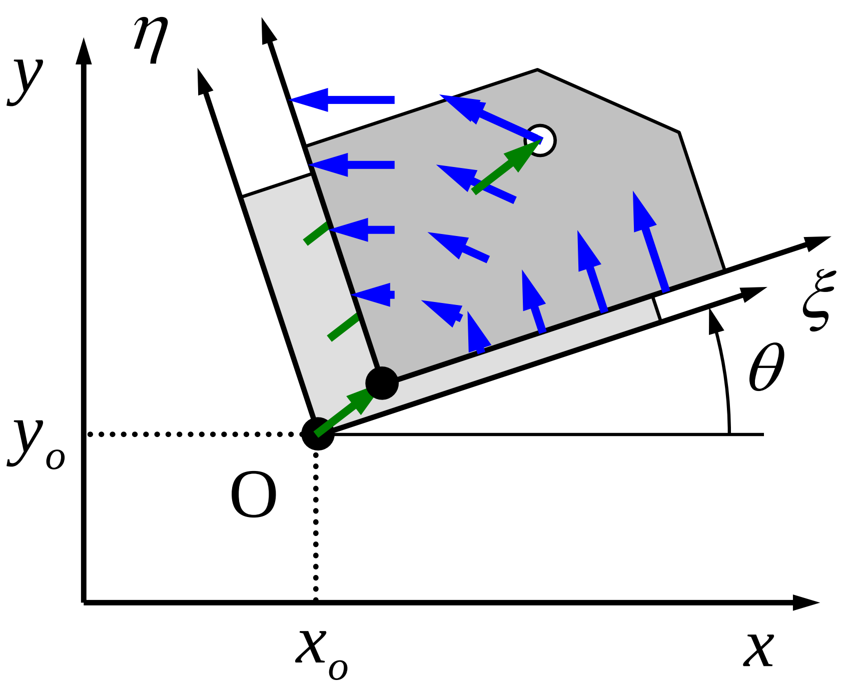
スカラーと2次元ベクトルの外積

とおくと、上式は以下のようになる。

$$\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{v}_o} + \omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

平面物体の速度と角速度⑥

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -(y - y_o) \\ x - x_o \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_o = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\omega(y - y_o) \\ \omega(x - x_o) \end{bmatrix} = \omega \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}$$

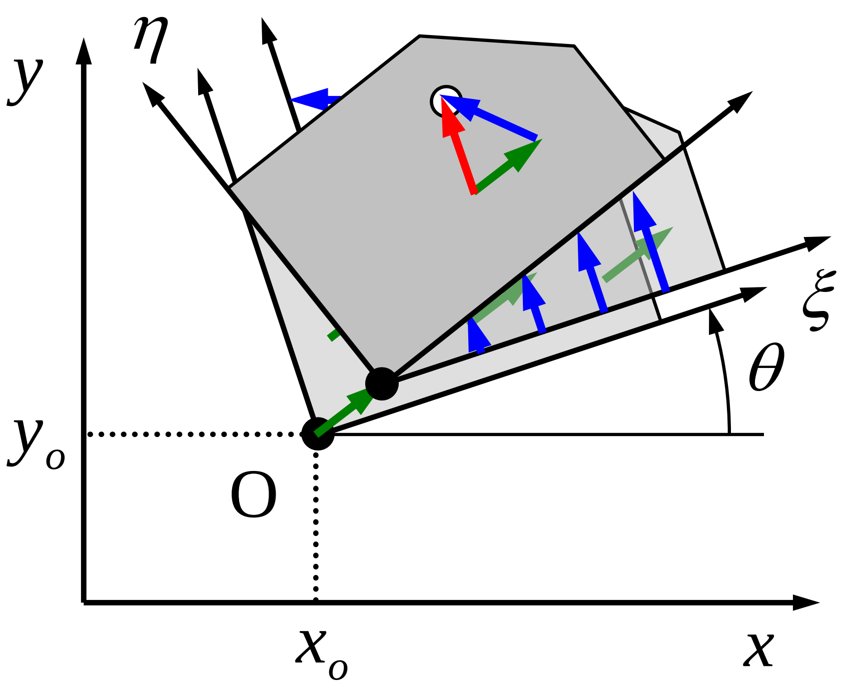
スカラーと2次元ベクトルの外積

とおくと、上式は以下のようになる。

$$\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{v}_o} + \underline{\omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)}$$

平面物体の速度と角速度⑦

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -(y - y_o) \\ x - x_o \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_o = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix},$$

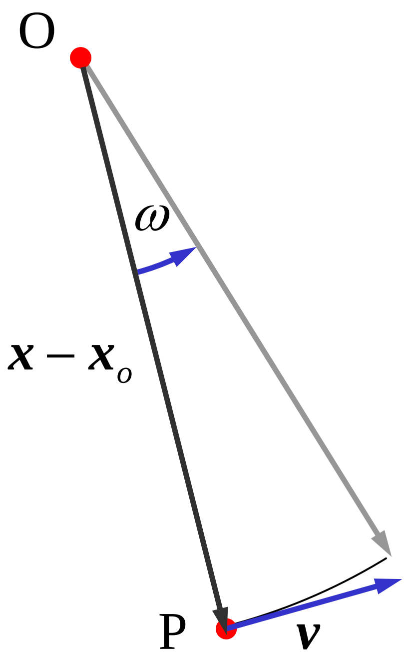
$$\begin{bmatrix} -\omega(y - y_o) \\ \omega(x - x_o) \end{bmatrix} = \omega \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}$$

スカラーと2次元ベクトルの外積

とおくと、上式は以下のようになる。

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{v}_o} + \underline{\omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)}$$

補足



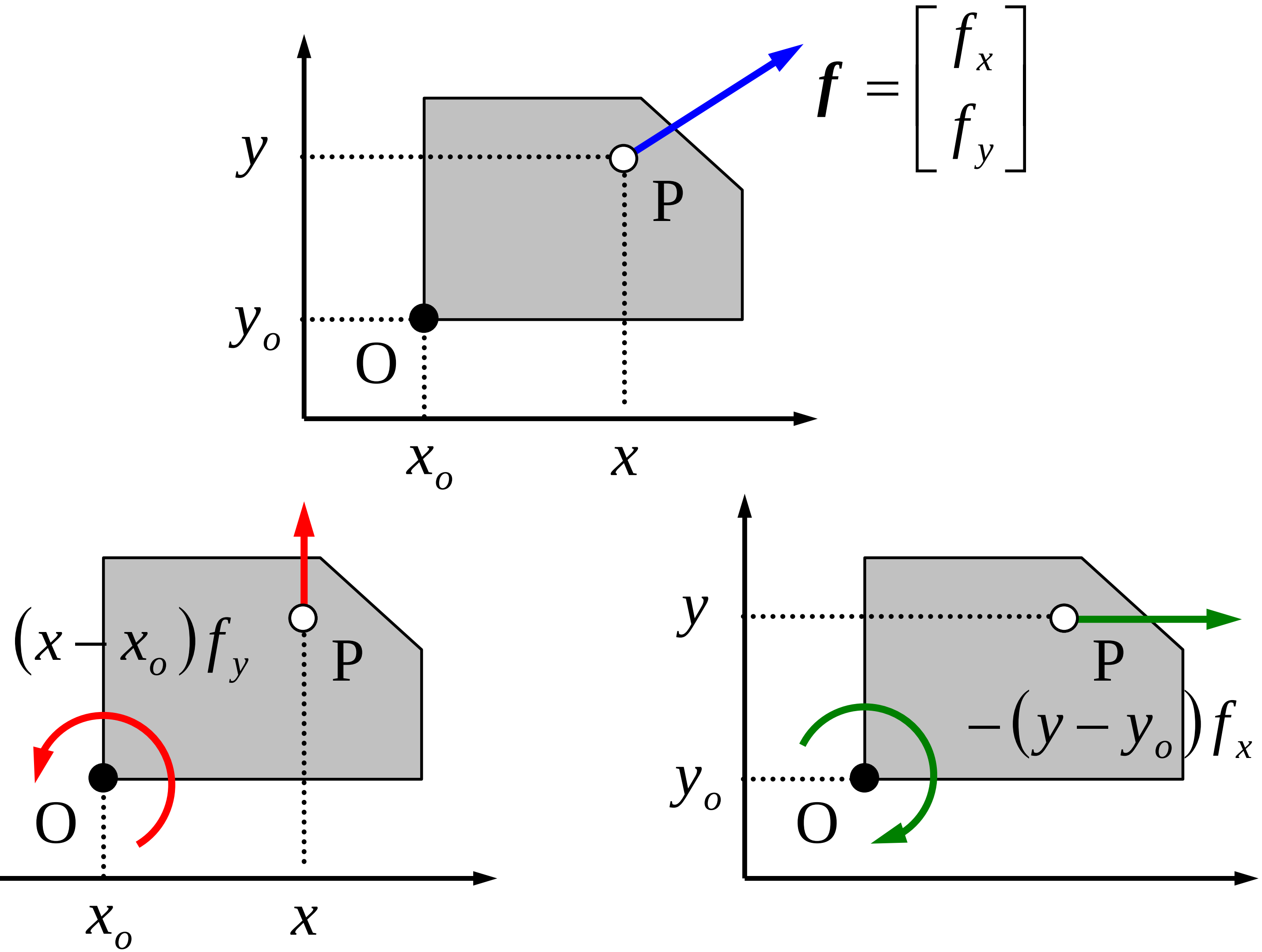
$$\boldsymbol{v}=\omega\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)=\omega\times\begin{bmatrix}x-x_o\\y-y_o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\omega(y-y_o)\\\omega(x-x_o)\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{v}=(x-x_o)\cdot-\omega(y-y_o)+(y-y_o)\cdot\omega(x-x_o)=0$$

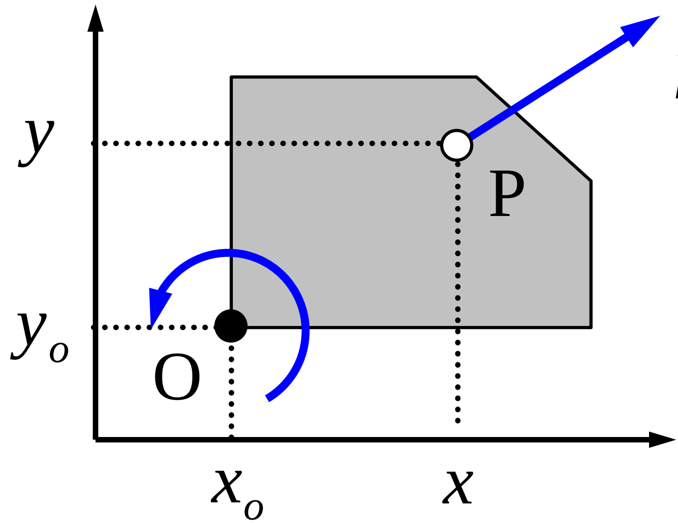
$$|\boldsymbol{v}|=|\omega\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)|=\sqrt{(y-y_o)^2\omega^2+(x-x_o)^2\omega^2}=\omega\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}=\omega\cdot|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o|$$

参照点Oを中心とする角速度ωの回転運動において、点Pでの速度ベクトル$\boldsymbol{v}$は位置ベクトル$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o$に直交し、大きさは$\omega$倍となる。

平面物体に作用する力とモーメント①



平面物体に作用する力とモーメント②



$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

参照点Oまわりのモーメント:

$$m = (x - x_o) f_y - (y - y_o) f_x = \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

2つの2次元ベクトルの外積

合力と合モーメント

平面物体上のn個の点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ に力が作用しているとする。

点 P_k の位置ベクトル: $\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$　　点 P_k に作用する力: $\boldsymbol{f}_k = \begin{bmatrix} f_x^k \\ f_y^k \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f}_k, \quad M = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_o) \times \boldsymbol{f}_k$$

より詳細には

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} f_x^k, \quad F_y = \sum_{k=1}^{n} f_y^k,$$

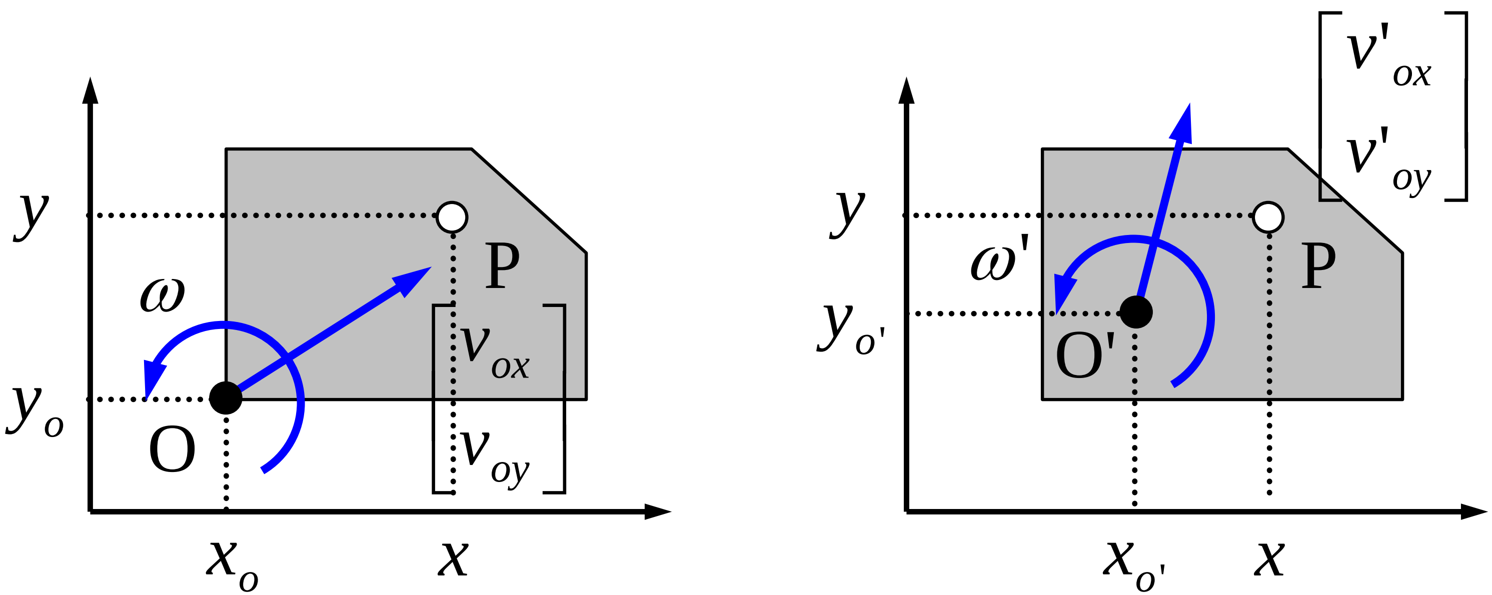
$$M = \sum_{k=1}^{n} \left\{ (x_k - x_o) f_y^k - (y_k - y_o) f_x^k \right\}$$

剛体が平衡状態にあるための条件: $F_x = 0, F_y = 0, M = 0$

等価変換

平面物体の速度／角速度は参照点Oで測っている。

→ 他の参照点O’ではどのような速度／各速度になっているか？



物体上の任意の点Pにおける（空間座標系に対する）速度は一致するはず

平面運動における等価変換①

参照点Oでの速度／角速度による点Pでの速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

参照点O'での速度／角速度による点Pでの速度

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'_o + \omega' \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_o)$$

$$\boldsymbol{v}_o + \omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) = \boldsymbol{v}'_o + \omega' \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_o)$$

ωを分配し$\boldsymbol{x}$でくくると $(\boldsymbol{v}_o - \omega \times \boldsymbol{x}_o) + \omega \times \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{v}'_o - \omega' \times \boldsymbol{x}'_o) + \omega' \times \boldsymbol{x}$

$$\{(\boldsymbol{v}_o - \omega \times \boldsymbol{x}_o) - (\boldsymbol{v}'_o - \omega' \times \boldsymbol{x}'_o)\} + (\omega - \omega') \times \boldsymbol{x} = 0$$

任意の$\boldsymbol{x}$について成り立つためには

$$\boldsymbol{v}_o - \omega \times \boldsymbol{x}_o = \boldsymbol{v}'_o - \omega' \times \boldsymbol{x}'_o, \quad \omega = \omega'$$

$$\therefore \boldsymbol{v}'_o = \boldsymbol{v}_o + \omega \times (\boldsymbol{x}'_o - \boldsymbol{x}_o), \quad \omega' = \omega$$

$$v'_{ox} = v_{ox} - \omega(y'_o - y_o), \quad v'_{oy} = v_{oy} + \omega(x'_o - x_o), \quad \omega' = \omega$$

平面運動における等価変換②

平面物体の力／モーメントは参照点Oで測っている。

→ 他の参照点O'ではどのような力／モーメントになっているか？

$$F' = \sum_{k=1}^{n} f_k = F \qquad M' = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_o) \times f_k$$

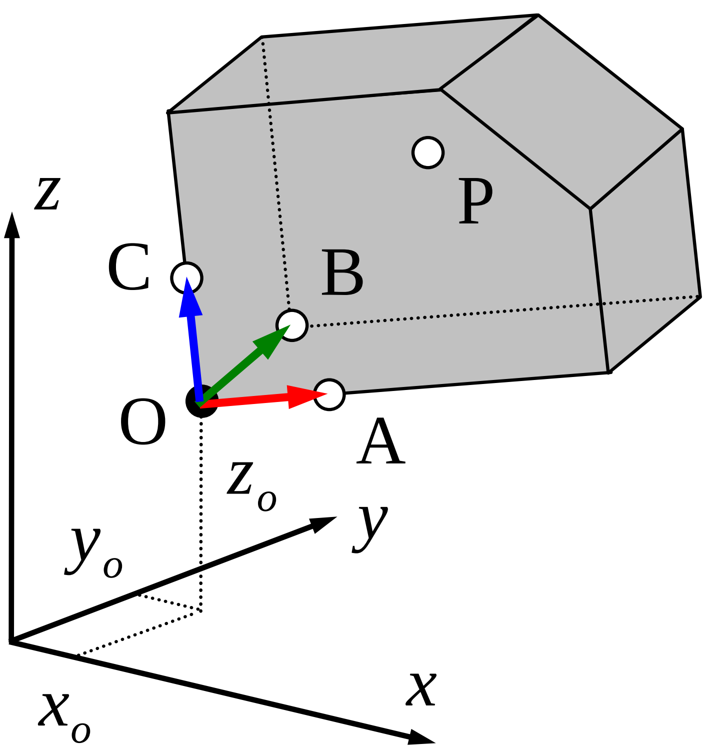
$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_o + x_o - x'_o) \times f_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_o) \times f_k + \sum_{k=1}^{n} (x_o - x'_o) \times f_k$$

$$= M + (x_o - x'_o) \times F$$

$$\therefore F' = F, \quad M' = M + (x_o - x'_o) \times F$$

剛体の空間運動①



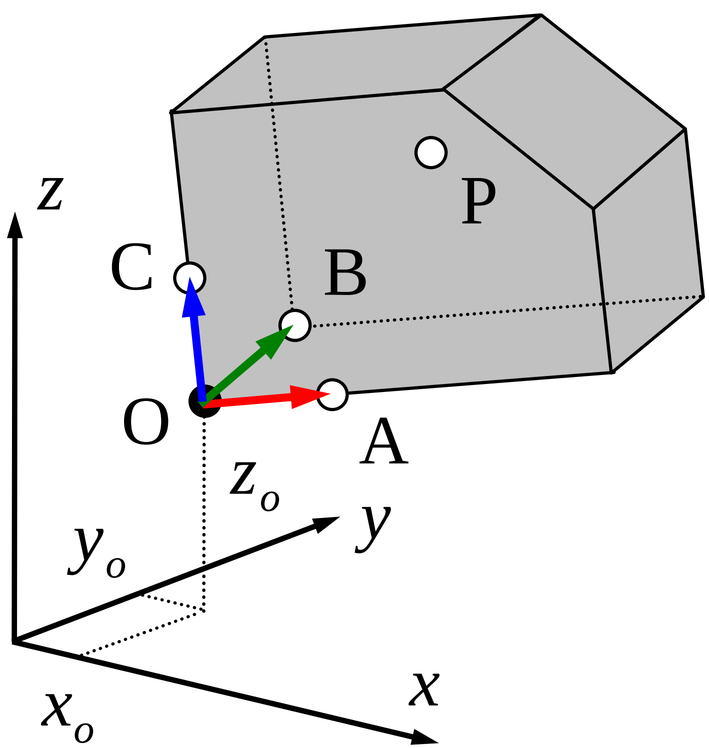
物体座標系での点Pの位置：

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \xi\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \eta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \zeta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\xi\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \eta\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} + \zeta\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

剛体の空間運動②



$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}$$

回転行列

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_o + R\boldsymbol{\xi}$$

空間運動の回転行列

$$R^T R = I$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^T \\ \boldsymbol{b}^T \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2 = 1$$

$$\|\boldsymbol{b}\| = b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2 = 1$$

$$\|\boldsymbol{c}\| = c_x{}^2 + c_y{}^2 + c_z{}^2 = 1$$

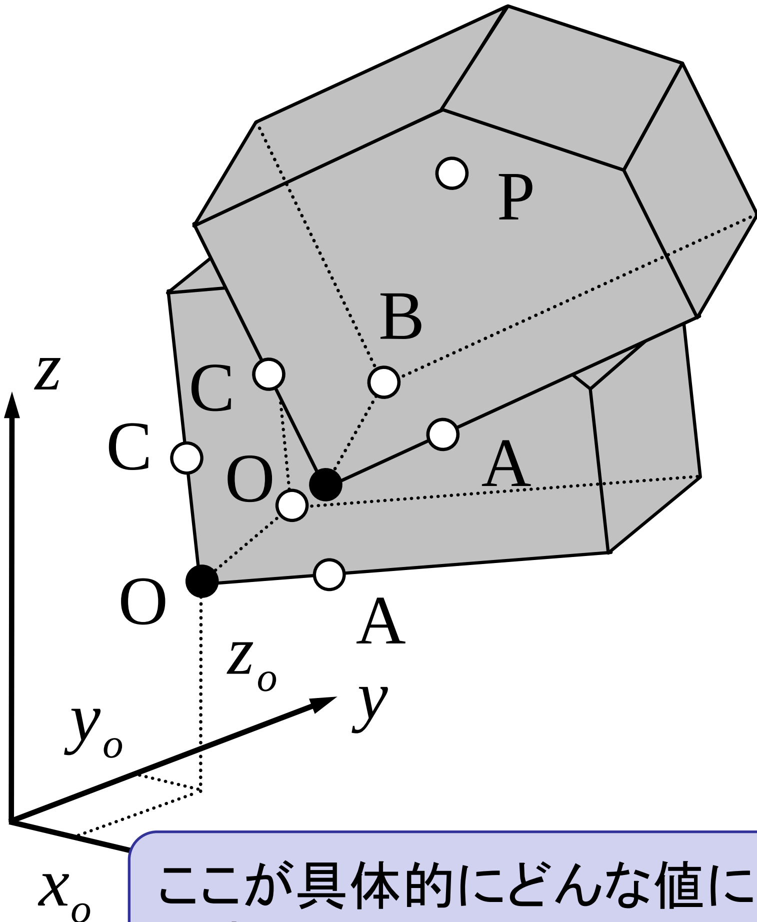
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z = 0$$

- ベクトル***a***、***b***、***c***は
  正規直交座標の基底
- 回転行列Rの9個の成分のうち、独立に決めることができる成分数は9-6=3
- 空間運動には回転3自由度がある

物体の速度と角速度



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_o + R\xi$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \dot{R}\xi$$

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} \dot{a}_x & \dot{b}_x & \dot{c}_x \\ \dot{a}_y & \dot{b}_y & \dot{c}_y \\ \dot{a}_z & \dot{b}_z & \dot{c}_z \end{bmatrix}$$

$$\xi = R^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

$$\therefore \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \underline{\dot{R}R^T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

ここが具体的にどんな値になるか考えていく。

回転運動による速度①

$$RR^T = I$$

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \dot{I} = 0_{3\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_x & \dot{b}_x & \dot{c}_x \\ \dot{a}_y & \dot{b}_y & \dot{c}_y \\ \dot{a}_z & \dot{b}_z & \dot{c}_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z \\ \dot{b}_x & \dot{b}_y & \dot{b}_z \\ \dot{c}_x & \dot{c}_y & \dot{c}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

回転運動による速度②

$$\dot{R}R^T \qquad\qquad R\dot{R}^T$$

1行1列: $\dot{a}_x a_x + \dot{b}_x b_x + \dot{c}_x c_x + a_x \dot{a}_x + b_x \dot{b}_x + c_x \dot{c}_x = 0$

1行2列: $\dot{a}_x a_y + \dot{b}_x b_y + \dot{c}_x c_y + a_x \dot{a}_y + b_x \dot{b}_y + c_x \dot{c}_y = 0$

1行3列: $\dot{a}_x a_z + \dot{b}_x b_z + \dot{c}_x c_z + a_x \dot{a}_z + b_x \dot{b}_z + c_x \dot{c}_z = 0$

2行1列: $\dot{a}_y a_x + \dot{b}_y b_x + \dot{c}_y c_x + a_y \dot{a}_x + b_y \dot{b}_x + c_y \dot{c}_x = 0$

2行2列: $\dot{a}_y a_y + \dot{b}_y b_y + \dot{c}_y c_y + a_y \dot{a}_y + b_y \dot{b}_y + c_y \dot{c}_y = 0$

2行3列: $\dot{a}_y a_z + \dot{b}_y b_z + \dot{c}_y c_z + a_y \dot{a}_z + b_y \dot{b}_z + c_y \dot{c}_z = 0$

3行1列: $\dot{a}_z a_x + \dot{b}_z b_x + \dot{c}_z c_x + a_z \dot{a}_x + b_z \dot{b}_x + c_z \dot{c}_x = 0$

3行2列: $\dot{a}_z a_y + \dot{b}_z b_y + \dot{c}_z c_y + a_z \dot{a}_y + b_z \dot{b}_y + c_z \dot{c}_y = 0$

3行3列: $\dot{a}_z a_z + \dot{b}_z b_z + \dot{c}_z c_z + a_z \dot{a}_z + b_z \dot{b}_z + c_z \dot{c}_z = 0$

回転運動による速度③

$$\dot{R}R^T \qquad\qquad R\dot{R}^T$$

1行1列： $2\left(\dot{a}_x a_x + \dot{b}_x b_x + \dot{c}_x c_x\right) = 0$

1行2列： $\dot{a}_x a_y + \dot{b}_x b_y + \dot{c}_x c_y + a_x \dot{a}_y + b_x \dot{b}_y + c_x \dot{c}_y = 0$

1行3列： $\dot{a}_x a_z + \dot{b}_x b_z + \dot{c}_x c_z + a_x \dot{a}_z + b_x \dot{b}_z + c_x \dot{c}_z = 0$

2行1列： $\dot{a}_y a_x + \dot{b}_y b_x + \dot{c}_y c_x + a_y \dot{a}_x + b_y \dot{b}_x + c_y \dot{c}_x = 0$

2行2列： $2\left(\dot{a}_y a_y + \dot{b}_y b_y + \dot{c}_y c_y\right) = 0$

2行3列： $\dot{a}_y a_z + \dot{b}_y b_z + \dot{c}_y c_z + a_y \dot{a}_z + b_y \dot{b}_z + c_y \dot{c}_z = 0$

3行1列： $\dot{a}_z a_x + \dot{b}_z b_x + \dot{c}_z c_x + a_z \dot{a}_x + b_z \dot{b}_x + c_z \dot{c}_x = 0$

3行2列： $\dot{a}_z a_y + \dot{b}_z b_y + \dot{c}_z c_y + a_z \dot{a}_y + b_z \dot{b}_y + c_z \dot{c}_y = 0$

3行3列： $2\left(\dot{a}_z a_z + \dot{b}_z b_z + \dot{c}_z c_z\right) = 0$

回転運動による速度④

- ベクトル$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$は正規直交座標の基底
- 回転行列Rの9個の成分のうち、独立に決めることができる成分数は9-6=3
- 空間運動には回転3自由度がある

→　新たに独立な3変数を導入

$$\omega_x = \dot{a}_z a_y + \dot{b}_z b_y + \dot{c}_z c_y$$

$$\omega_y = \dot{a}_x a_z + \dot{b}_x b_z + \dot{c}_x c_z$$

$$\omega_z = \dot{a}_y a_x + \dot{b}_y b_x + \dot{c}_y c_x$$

回転運動による速度⑤

	$\dot{R}R^T$	$R\dot{R}^T$
1行1列:	0	
1行2列:	$(-\omega_z)$	$+a_x\dot{a}_y+b_x\dot{b}_y+c_x\dot{c}_y=0$
1行3列:	ω_y	$+\quad(-\omega\quad)\quad=0$
2行1列:	ω_z	$-$
2行2列:	0	
2行3列:	$(-\omega_x)$	$+$
3行1列:	$(-\omega_y)$	$+a_z\dot{a}_x+b_z\dot{b}_x+c$
3行2列:	ω_x	$+\quad(-\omega_x)\quad=0$
3行3列:	0	

例えば、3行2列目の要素が0となるためには、以下である必要がある。これを2行3列目に代入できる。

$$a_z\dot{a}_y+b_z\dot{b}_y+c_z\dot{c}_y=-\omega_x$$

回転運動による速度⑥

$$\dot{R}R^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

:歪対称行列

$$\dot{R}R^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_o \\ y-y_o \\ z-z_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega_z(y-y_o)+\omega_y(z-z_o) \\ \omega_z(x-x_o)-\omega_x(z-z_o) \\ -\omega_y(x-x_o)+\omega_x(y-y_o) \end{bmatrix}$$

回転運動による速度⑦

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

$$\therefore A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

回転運動による速度⑧

これは極めて重要。ベクトル$\boldsymbol{a}$の要素を用いて歪対称行列Aを定義すると、ベクトル$\boldsymbol{a}$とベクトル$\boldsymbol{b}$の外積は、行列Aとベクトル$\boldsymbol{b}$の掛け算として表現できる。掛け算であれば、分配法則等を適用できる。

$$A=\begin{bmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\ a_zb_x-a_xb_z\\ a_xb_y-a_yb_x\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\ a_zb_x-a_xb_z\\ a_xb_y-a_yb_x\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

回転運動による速度⑨

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$ とおくと

$$\dot{R}R^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ z - z_o \end{bmatrix}$$

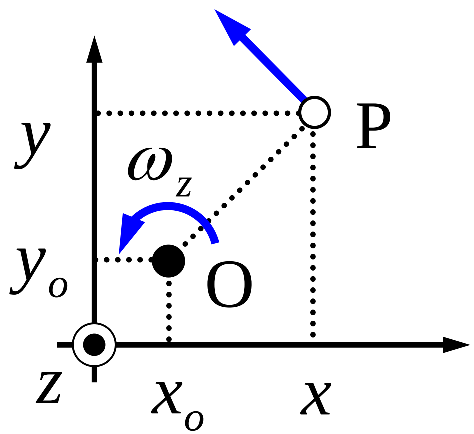
$$= \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ z - z_o \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

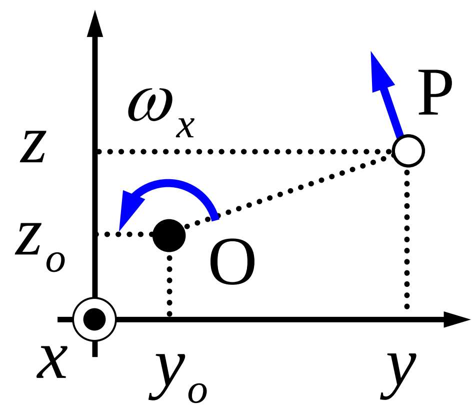
$$\therefore \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

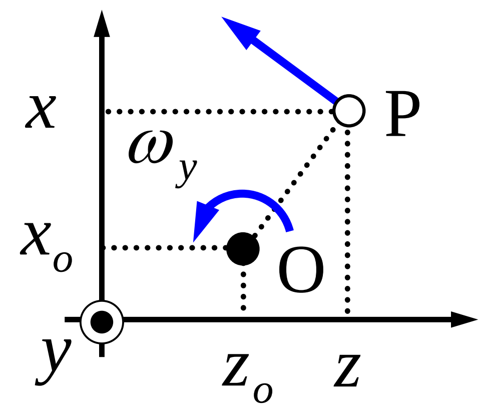
回転運動による速度⑩

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)=\begin{bmatrix}-\omega_z(y-y_o)+\omega_y(z-z_o)\\ \omega_z(x-x_o)-\omega_x(z-z_o)\\ -\omega_y(x-x_o)+\omega_x(y-y_o)\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}$: 各軸回りの角速度

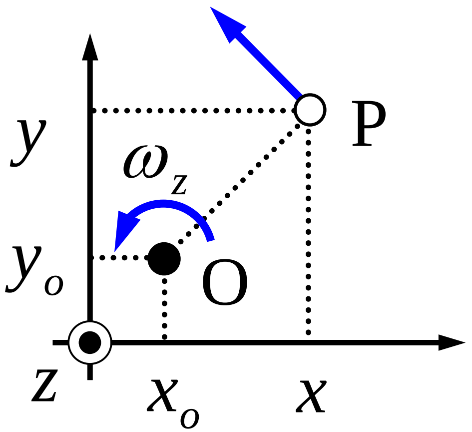






$$\begin{bmatrix}-\omega_z(y-y_o)\\ \omega_z(x-x_o)\\ 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0\\ -\omega_x(z-z_o)\\ \omega_x(y-y_o)\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\omega_y(z-z_o)\\ 0\\ -\omega_y(x-x_o)\end{bmatrix}$$

平面運動と空間運動の速度



$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \omega \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$$

$$\omega \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega(y - y_o) \\ \omega(x - x_o) \end{bmatrix}$$

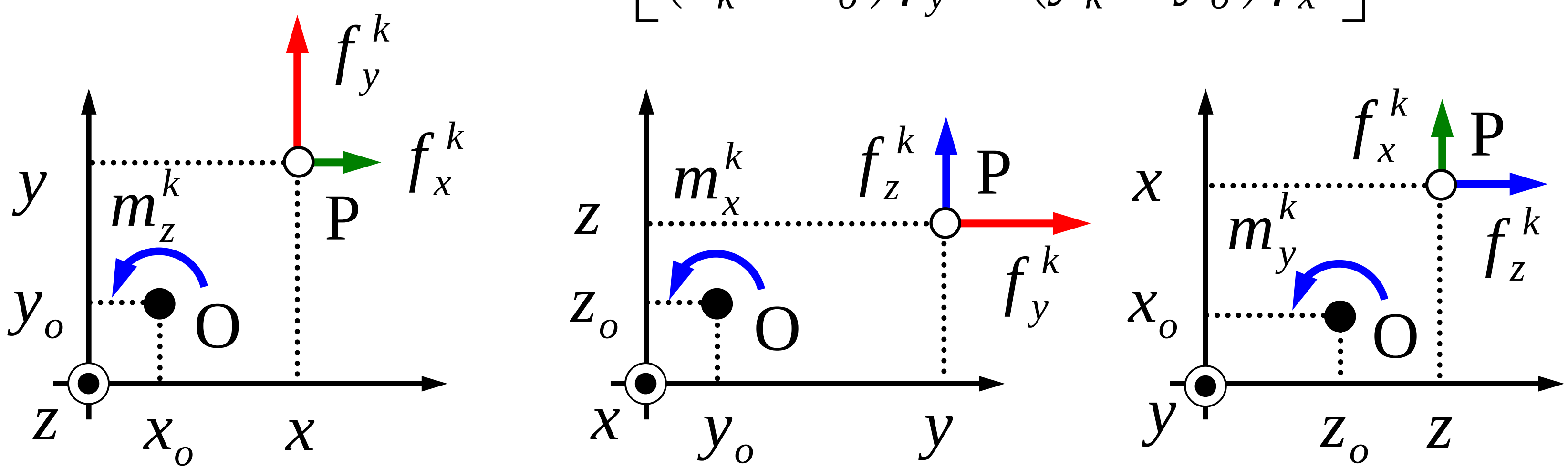
$$\begin{bmatrix} -\omega_z(y - y_o) \\ \omega_z(x - x_o) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega(y - y_o) \\ \omega(x - x_o) \\ 0 \end{bmatrix}$$

物体に作用する力とモーメント

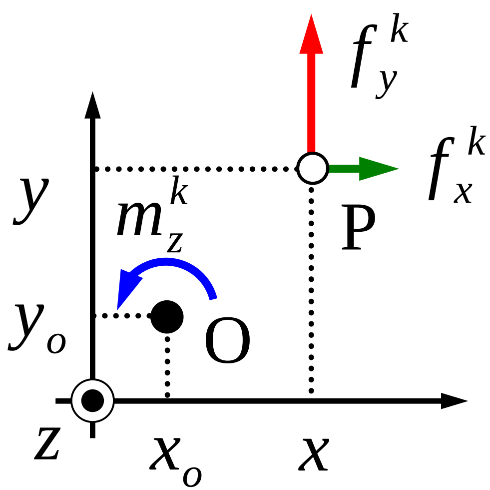
$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f}_k, \quad \boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_o) \times \boldsymbol{f}_k$$

$$(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_o) \times \boldsymbol{f}_k = \begin{bmatrix} (y_k - y_o) f_z^k - (z_k - z_o) f_y^k \\ (z_k - z_o) f_x^k - (x_k - x_o) f_z^k \\ (x_k - x_o) f_y^k - (y_k - y_o) f_x^k \end{bmatrix}$$



平面運動と空間運動のモーメント

$$M = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_o) \times \boldsymbol{f}_k$$



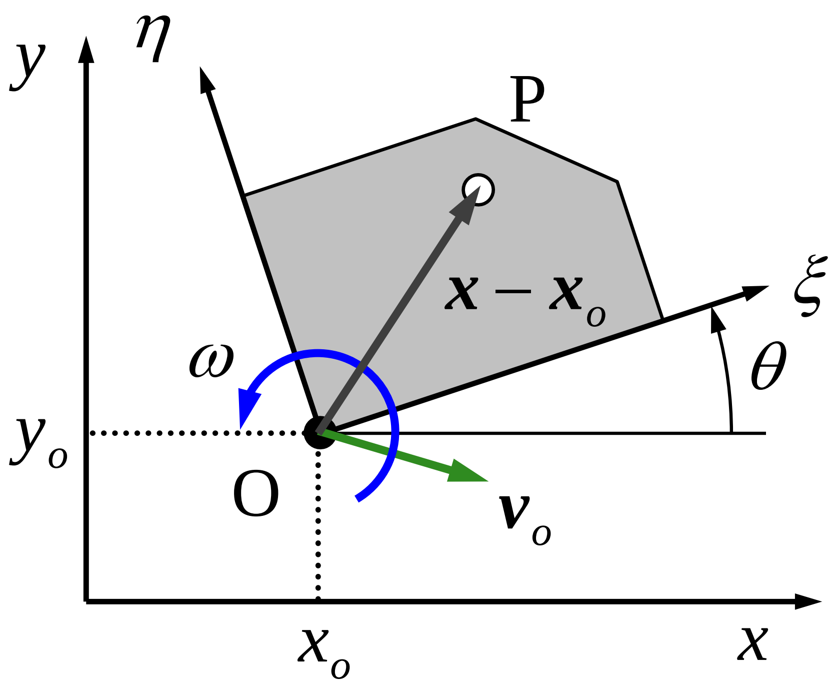
$$\begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = (x - x_o) f_y - (y - y_o) f_x$$

$$\begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x - x_o) f_y - (y - y_o) f_x \end{bmatrix}$$

まとめ：物体の速度／角速度と等価変換

物体が、空間座標が$\boldsymbol{x}_o$である参照点Oにおいて速度$\boldsymbol{v}_o$、角速度$\boldsymbol{\omega}$で運動している時、空間座標が$\boldsymbol{x}$である点P（新参照点O'）における速度$\boldsymbol{v}'_o$、角速度$\boldsymbol{\omega}'$は

$$\boldsymbol{v}'_o = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o), \quad \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$$



まとめ：物体に作用する力／モーメントと等価変換

空間座標がx_oである参照点Oに力F、モーメントMが作用している時、空間座標がxである点P（新参照点O'）における力F'、モーメントM'は

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{x}_o - \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{F}$$