ハンドリング工学特論

大阪大学大学院 工学研究科 マテリアル生産科学専攻
システムインテグレーション講座
生産システムインテグレーション領域
若松　栄史

5章のまとめ

- 剛体の位置／姿勢、速度／角速度の定式化

  → ６章「剛体の接触」にて利用

- 剛体に作用する力とモーメントの定式化

  → ７章「把持」にて利用

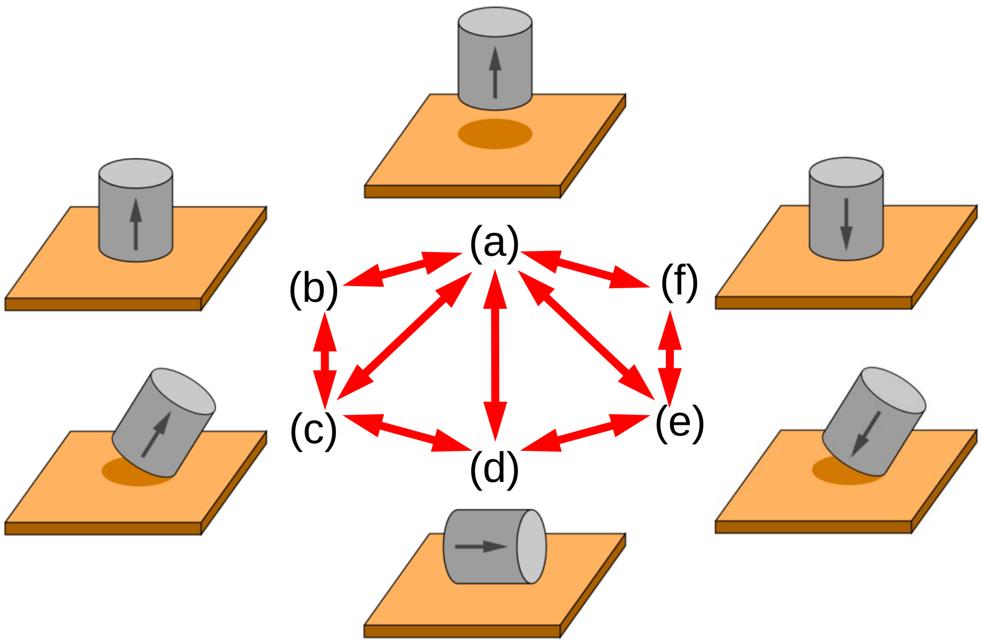
- 速度／角速度、力／モーメントの等価変換

  → ８章「コンプライアンス」にて利用

接触状態グラフ

運動物体が受ける運動の制約:

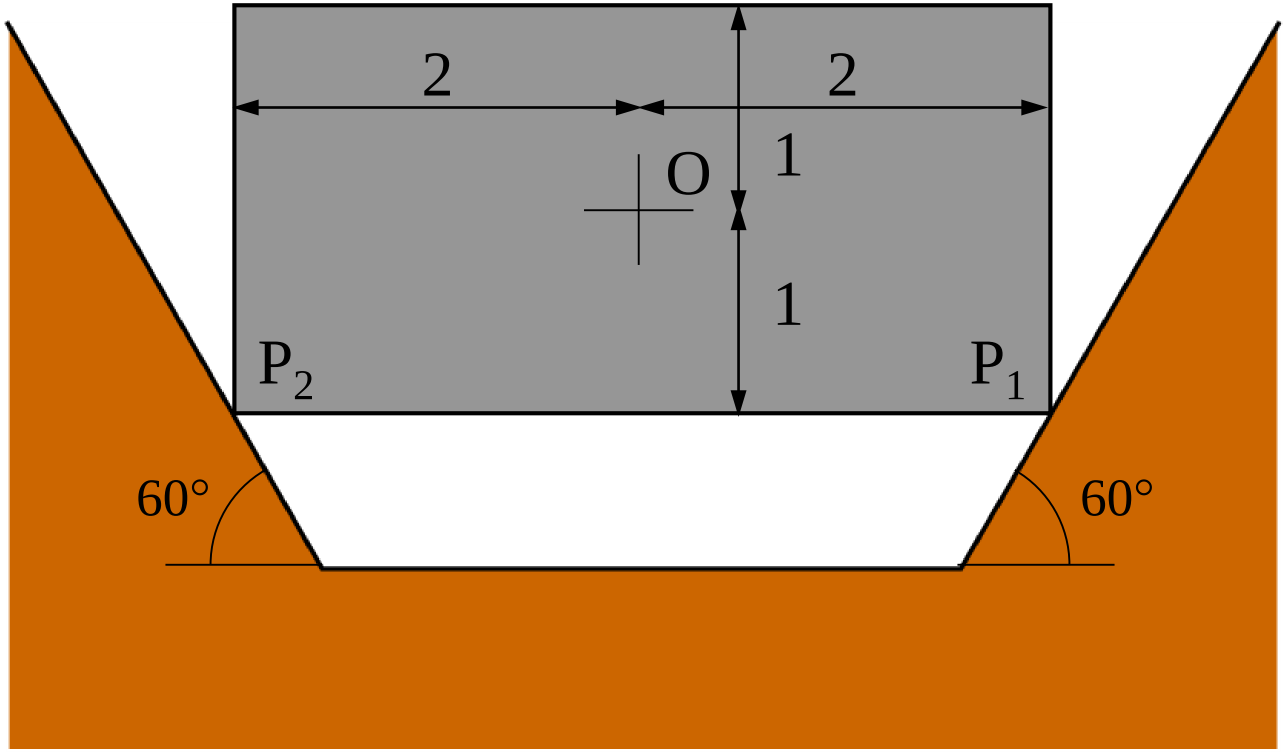
運動物体の面、稜線、頂点が、固定物体のどの面、稜線、頂点と接触しているかによって異なる



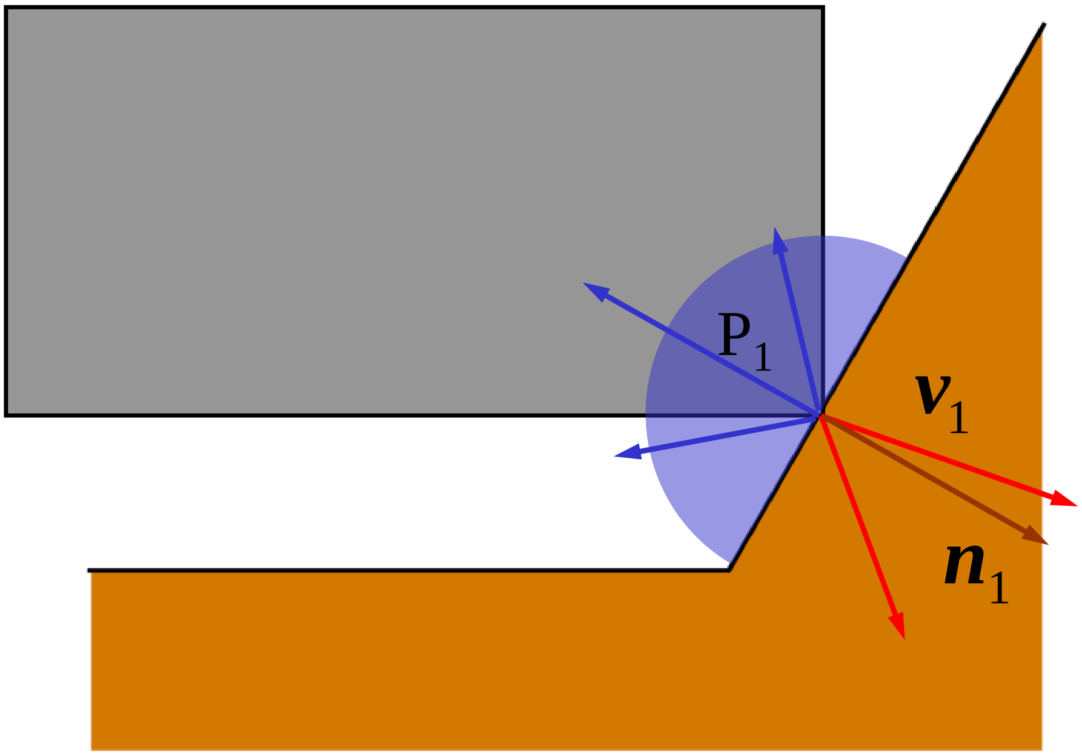
接触によって、具体的にどのような運動制約が加えられるのか？

剛体の接触

平面運動における運動制約

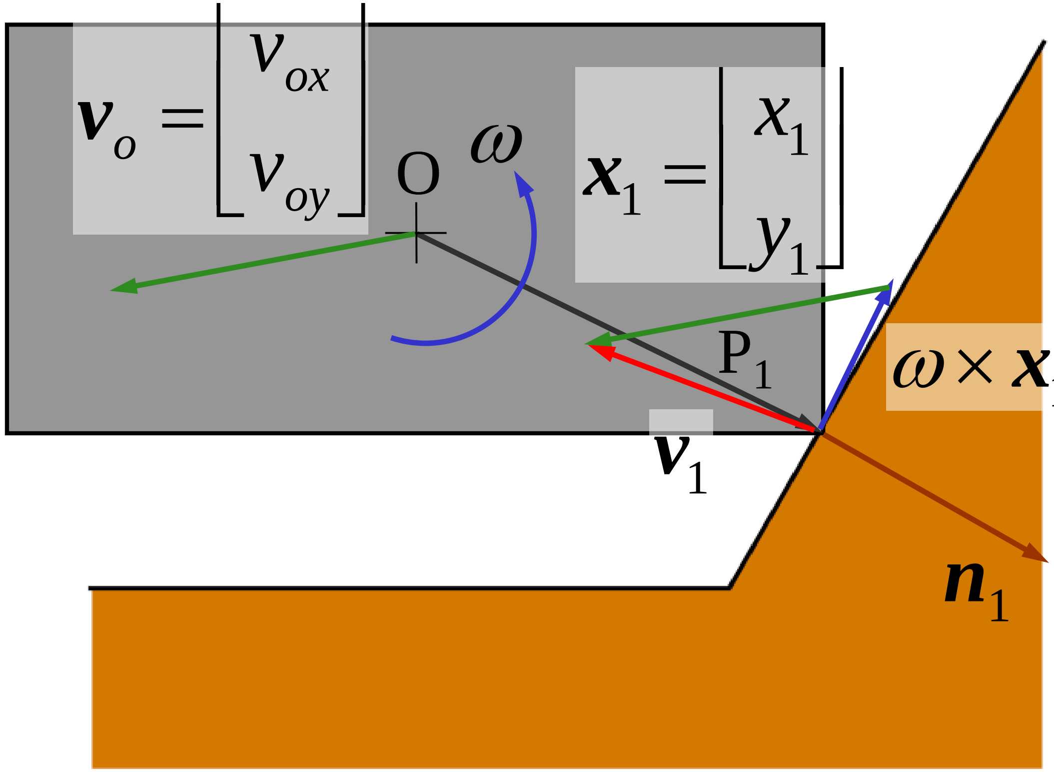


点P_1が接触していることによる運動制約①



点P_1の速度$\boldsymbol{v}_1$に関する制約：$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 \leq 0$

点P_1が接触していることによる運動制約②



点P_1の速度$\boldsymbol{v}_1$に関する制約： $\boldsymbol{n}_1 \cdot \underbrace{\left(\boldsymbol{v}_o + \omega \times \boldsymbol{x}_1\right)}_{\boldsymbol{v}_1} \leq 0$

点P_1が接触していることによる運動制約③

$$\boldsymbol{n}_1\cdot(\boldsymbol{v}_o+\omega\times\boldsymbol{x}_1)\le 0$$

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{n}_1\cdot(\omega\times\boldsymbol{x}_1)\le 0$$

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{v}_o+(\boldsymbol{x}_1\times\boldsymbol{n}_1)\cdot\omega\le 0$$ ←ベクトルのスカラー三重積の性質

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\-1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_{ox}\\v_{oy}\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\-1/2\end{bmatrix}\right)\cdot\omega\le 0$$

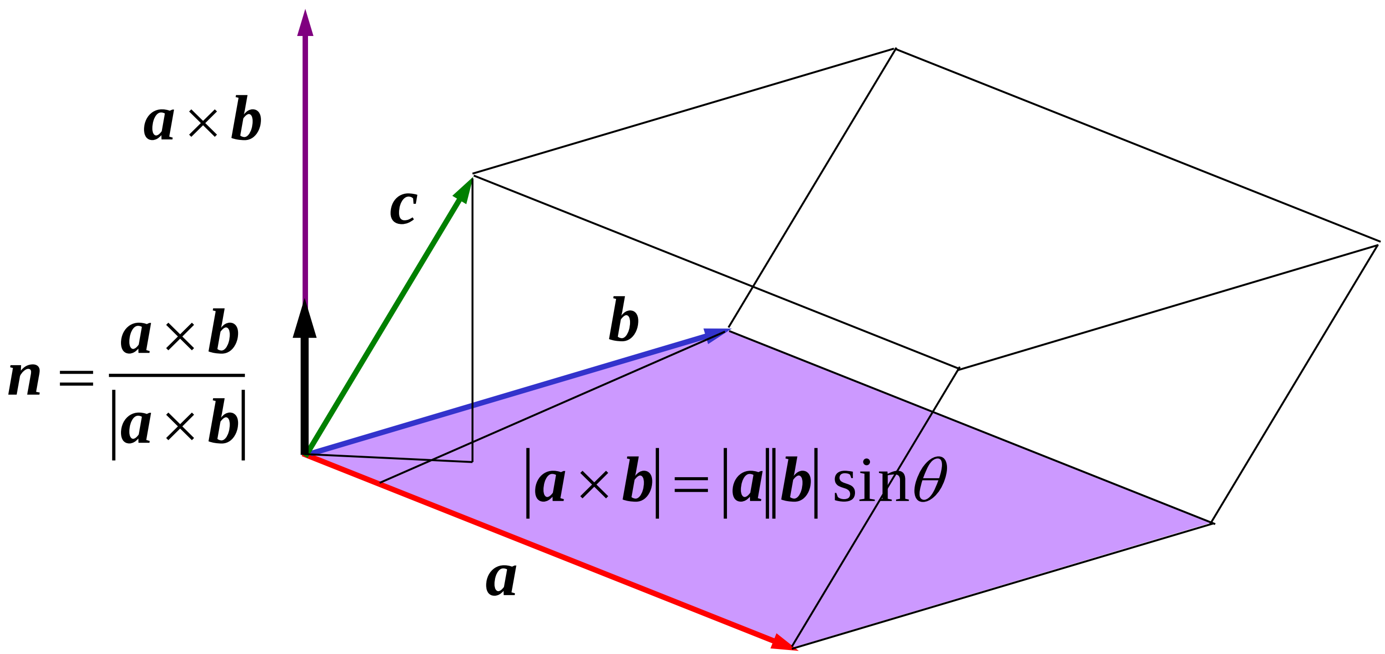
$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_{ox}+\left(-\frac{1}{2}\right)v_{oy}+\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\omega\le 0$$

物体の運動に対する制約→速度と角速度に関する一次不等式

補足：スカラー三重積①

- スカラー三重積：

二つのベクトルのベクトル積（外積）ともう一つのベクトルの内積

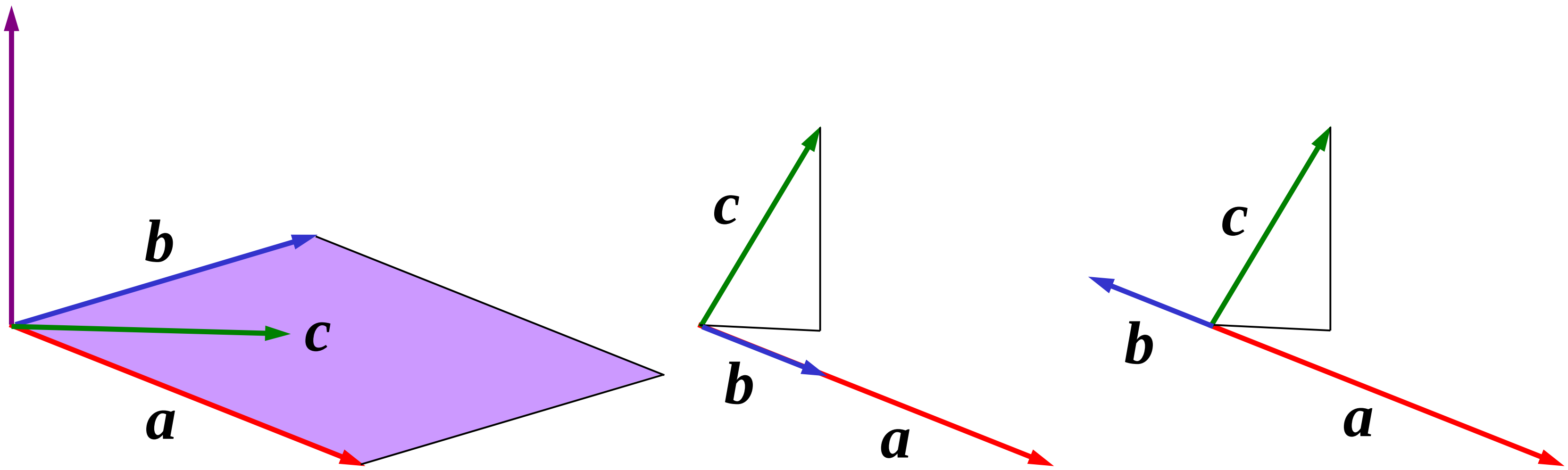


$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b = [a, b, c]$$

$$[-a, b, c] = [b, a, c] = -[a, b, c]$$

補足：スカラー三重積②

スカラー三重積が0になるのはどのような場合か？



$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 0$$

補足：スカラー三重積③

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{v}_o + \underline{\boldsymbol{n}_1 \cdot (\omega \times \boldsymbol{x}_1)} \leq 0$$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot (\omega \times \boldsymbol{x}_1) = \omega \cdot (\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{n}_1) = \boldsymbol{x}_1 \cdot (\boldsymbol{n}_1 \times \omega) = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{n}_1, \omega]$$

よって

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{v}_o + \underline{(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{n}_1) \cdot \omega} \leq 0$$

平面運動における運動制約式

点P_2が接触していることによる運動制約

$$\boldsymbol{n}_2 \cdot (\boldsymbol{v}_o + \omega \times \boldsymbol{x}_2) \le 0$$ より

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} v_{ox} + \left(-\frac{1}{2}\right) v_{oy} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}\omega \le 0$$

点P_1、P_2が接触していることによる運動制約

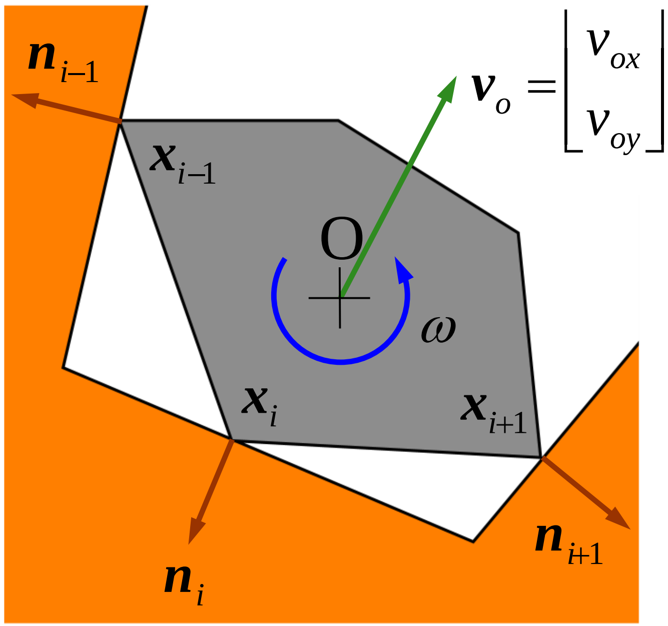
$$\begin{cases} \sqrt{3} v_{ox} + (-1) v_{oy} + \left(-2+\sqrt{3}\right)\omega \le 0 \\ -\sqrt{3} v_{ox} + (-1) v_{oy} + \left(2-\sqrt{3}\right)\omega \le 0 \end{cases}$$

平面運動における運動制約 ～まとめ～

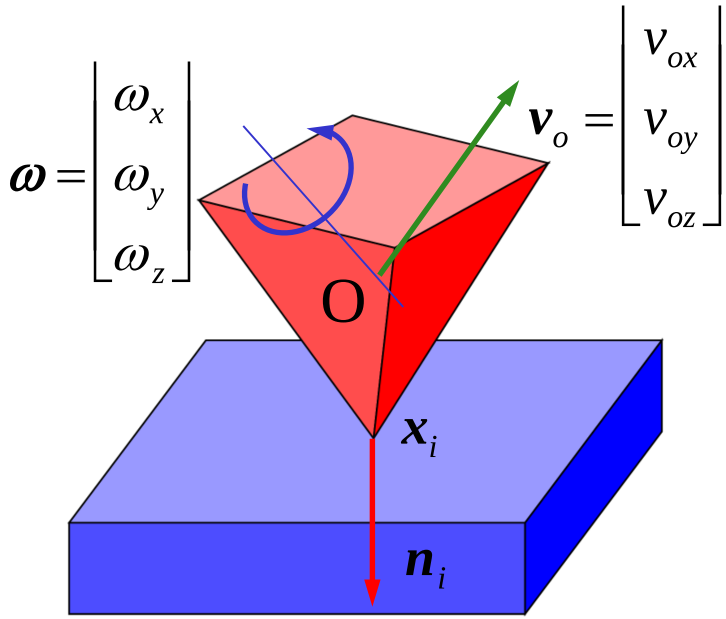
点P_iが接触していることによる運動制約

$$\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}_o + \left(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i\right) \cdot \omega \le 0$$

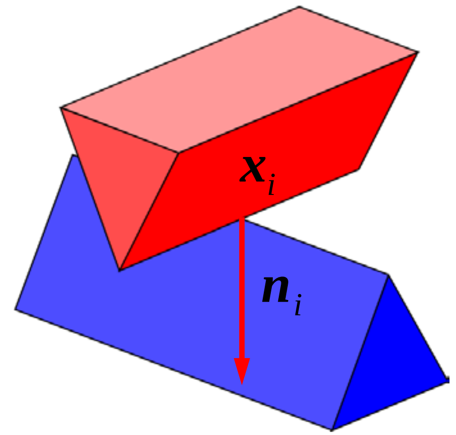
$$n_{ix} v_{ox} + n_{iy} v_{oy} + \left(x_i n_{iy} - y_i n_{ix}\right)\omega \le 0$$



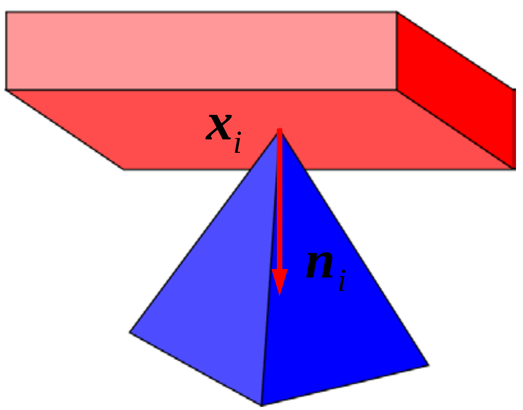
空間運動における運動制約



頂点ー面接触



稜線ー稜線接触



面ー頂点接触

点P_iが接触していることによる運動制約

$$\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}_o + (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i) \cdot \boldsymbol{\omega} \le 0$$

許容速度集合①

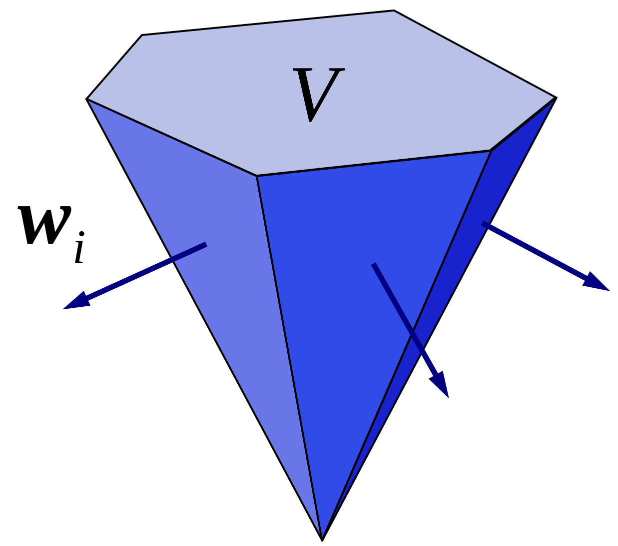
$$\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}_o + \left(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i\right) \cdot \boldsymbol{\omega} \le 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_o \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ v_{oz} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{w}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_i \\ \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \\ \left(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i\right)_x \\ \left(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i\right)_y \\ \left(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i\right)_z \end{bmatrix}$$

$$V = \left\{ \dot{\boldsymbol{q}} \;\middle|\; \boldsymbol{w}_i^T \dot{\boldsymbol{q}} \le 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

許容速度集合（admissible velocity set）

許容速度集合②



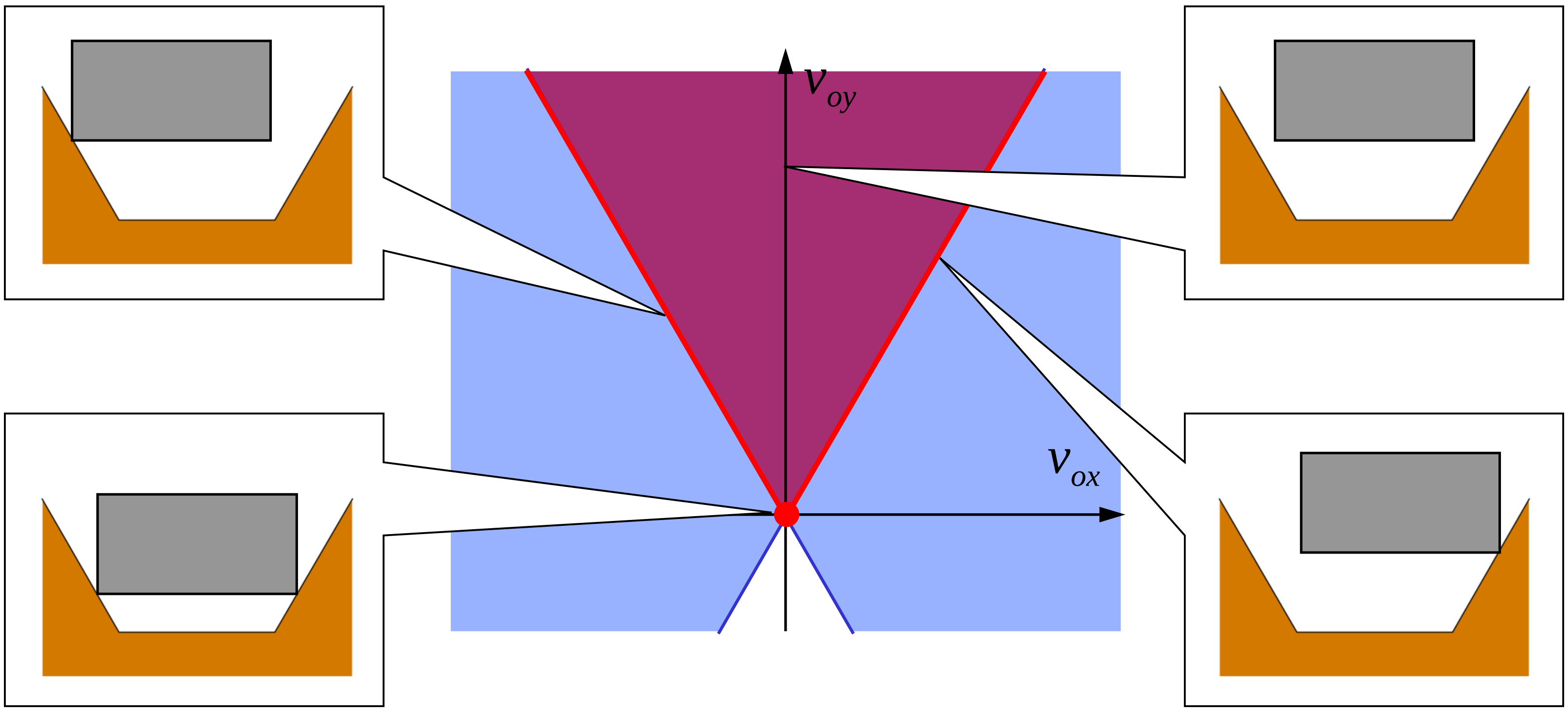
$$V = \left\{ \dot{\boldsymbol{q}} \;\middle|\; \boldsymbol{w}_i \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \le 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

$$V = \left\{ \dot{\boldsymbol{q}} \;\middle|\; \boldsymbol{w}_i^T \dot{\boldsymbol{q}} \le 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

許容速度集合（admissible velocity set）

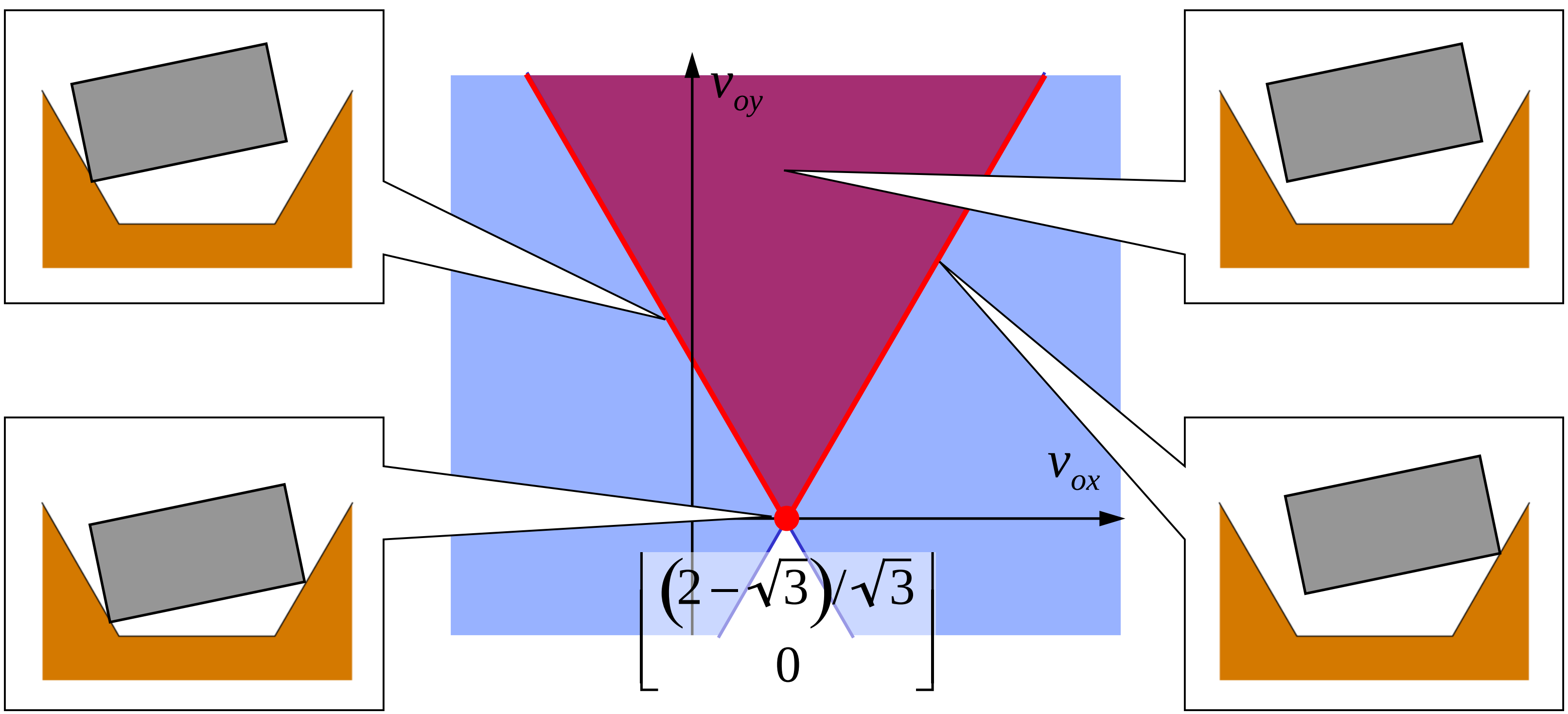
許容運動① ～物体が回転しない場合～

$\omega = 0$ の時
$$\begin{cases} \sqrt{3}v_{ox} + (-1)v_{oy} \le 0 \\ -\sqrt{3}v_{ox} + (-1)v_{oy} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{oy} \ge \sqrt{3}v_{ox} \\ v_{oy} \ge -\sqrt{3}v_{ox} \end{cases}$$



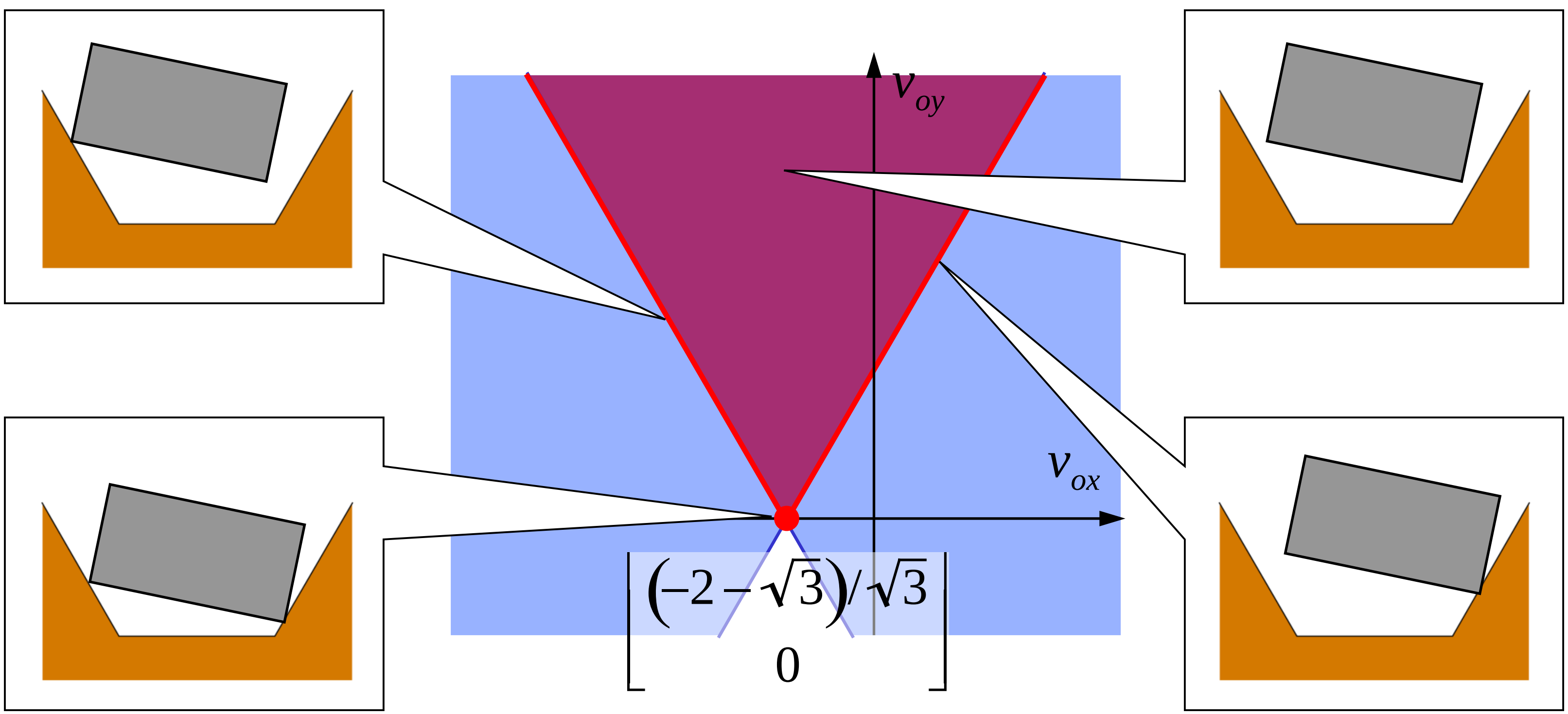
許容運動② ～物体が反時計まわりに回転する場合～

$\omega = 1$ の時 $\begin{cases} \sqrt{3}v_{ox} + (-1)v_{oy} \leq 2 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}v_{ox} + (-1)v_{oy} \leq -2 + \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{oy} \geq \sqrt{3}v_{ox} - 2 + \sqrt{3} \\ v_{oy} \geq -\sqrt{3}v_{ox} + 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

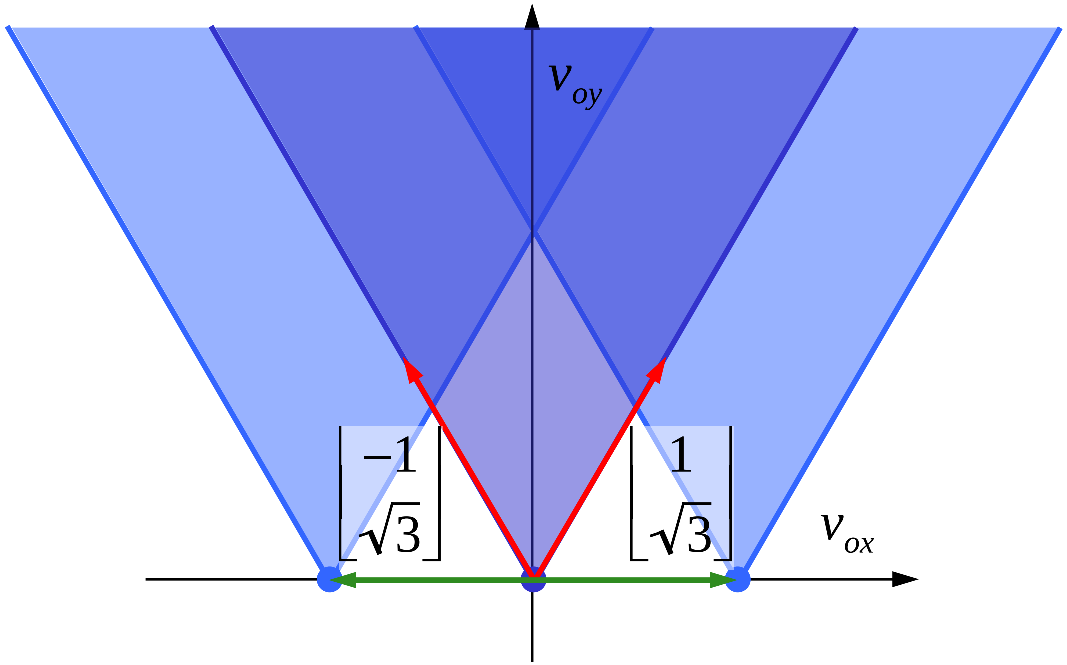


許容運動③ ～物体が時計まわりに回転する場合～

$$\omega = -1 \text{の時} \quad \begin{cases} \sqrt{3}v_{ox} + (-1)v_{oy} \le -2 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}v_{ox} + (-1)v_{oy} \le 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{oy} \ge \sqrt{3}v_{ox} + 2 - \sqrt{3} \\ v_{oy} \ge -\sqrt{3}v_{ox} - 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$



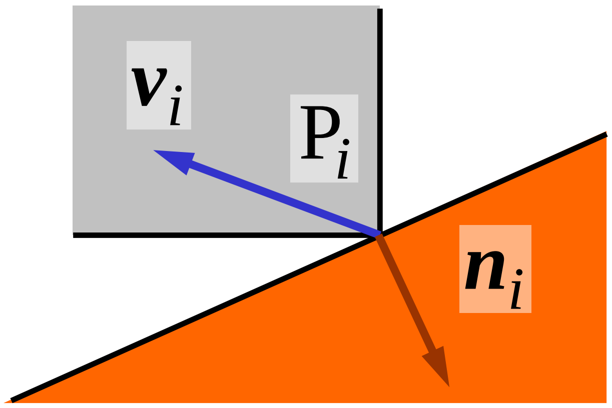
許容運動範囲のベクトル表現



$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} = \underline{\omega \begin{bmatrix} \left(2-\sqrt{3}\right)/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$c_1, c_2 \geq 0$$

運動制約の考え方



接触点P_iにおける固定物体の内向き法線ベクトルを$\mathbf{n}_i$とすると、運動物体のP_iにおける速度$\mathbf{v}_i$は以下の条件を満たさなくてはならない

$$\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \leq 0$$

一方で、点P_iでの速度$\mathbf{v}_i$は、物体の代表点の速度・角速度を用いて以下のように表される

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_o + \omega \times \boldsymbol{x}_i$$

従って点P_iが接触していることによって物体に加えられる運動制約は

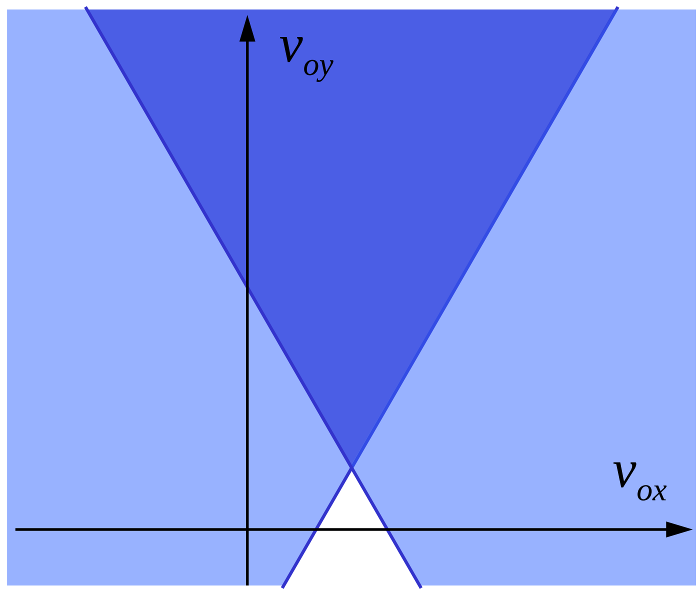
$$\boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{v}_o + \omega \times \boldsymbol{x}_i) = \underline{\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}_o + (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i) \cdot \omega \leq 0}$$

物体代表点の速度と角速度に関する一次不等式

許容運動の考え方①

$$\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}_o + (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i) \cdot \omega \leq 0 \quad \text{より} \quad A_i v_{ox} + B_i v_{oy} + C_i \omega \leq 0$$

ωを与えると $v_{oy} \leq D_i v_{ox} + E_i$ あるいは $v_{oy} \geq D_i v_{ox} + E_i$

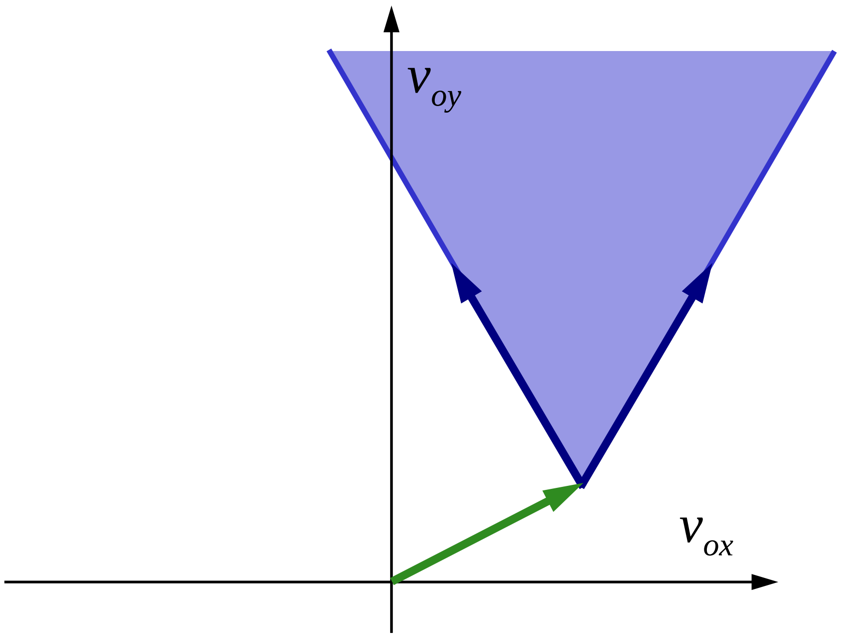


一般的に、物体は複数の点で接触するので、運動制約は速度と角速度に関する連立不等式となる

許容運動の考え方②

連立不等式より、ωを変化させた場合のv_{ox}とv_{oy}の取りうる範囲は、次のように表現することができる

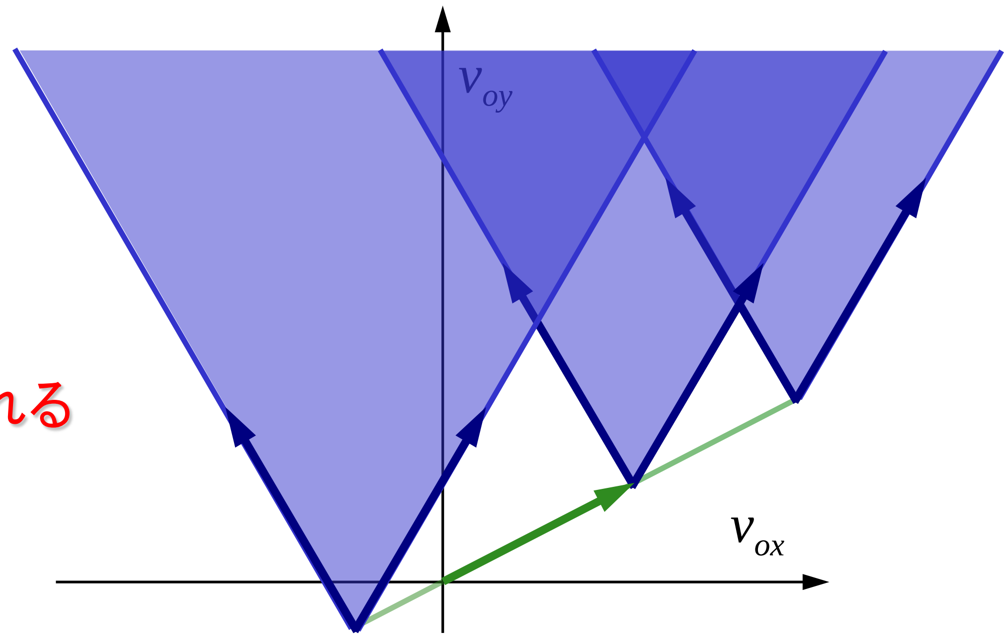
$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} = \omega \underline{\boldsymbol{a}_0} + c_1 \underline{\boldsymbol{a}_1} + c_2 \underline{\boldsymbol{a}_2}, \quad \text{s.t.} \quad c_1, c_2 \geq 0$$



許容運動の考え方③

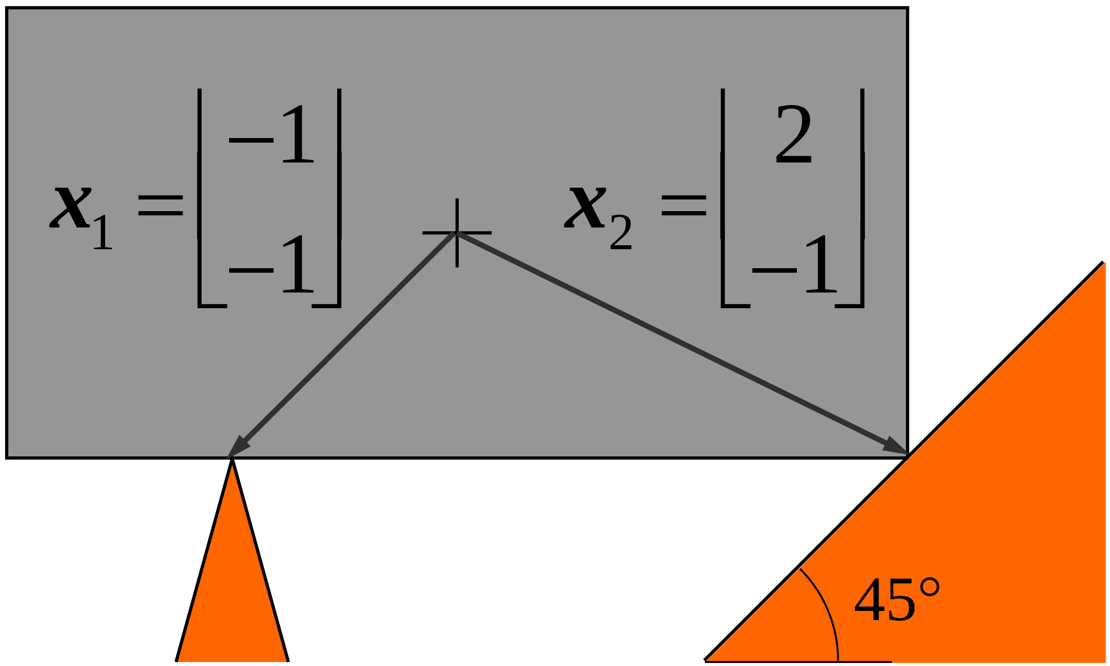
連立不等式より、ωを変化させた場合のv_{ox}とv_{oy}の取りうる範囲は、次のように表現することができる

$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} = \omega \underline{\boldsymbol{a}_0} + c_1 \underline{\boldsymbol{a}_1} + c_2 \underline{\boldsymbol{a}_2}, \quad \text{s.t.} \quad c_1, c_2 \geq 0$$



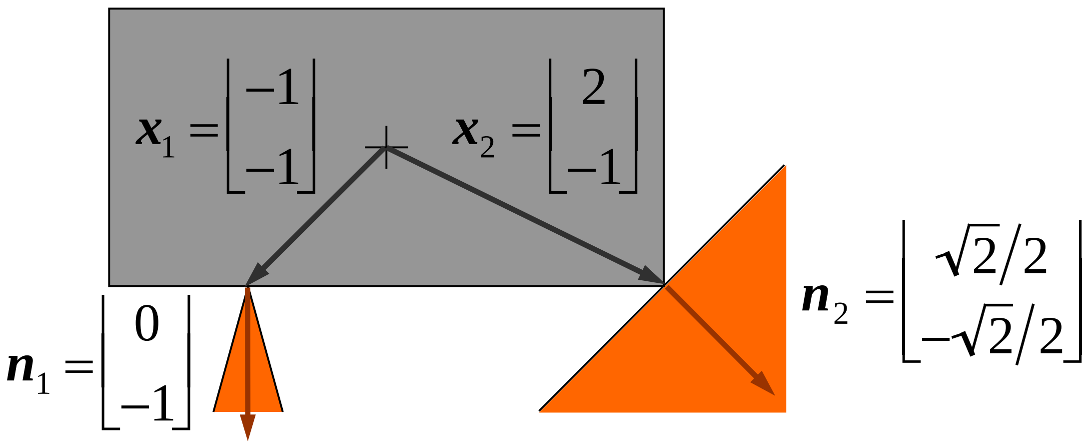
許容運動:
v_{ox}とv_{oy}(とω)の取りうる範囲
→凸多面錐によって表される

運動制約と許容運動の導出例①



この物体の運動制約を求めよ。また、許容運動を求めよ。

運動制約と許容運動の導出例②



$$\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}_o + (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{n}_i) \cdot \boldsymbol{\omega} \le 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \omega \le 0$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \right) \cdot \omega \le 0$$

運動制約と許容運動の導出例③

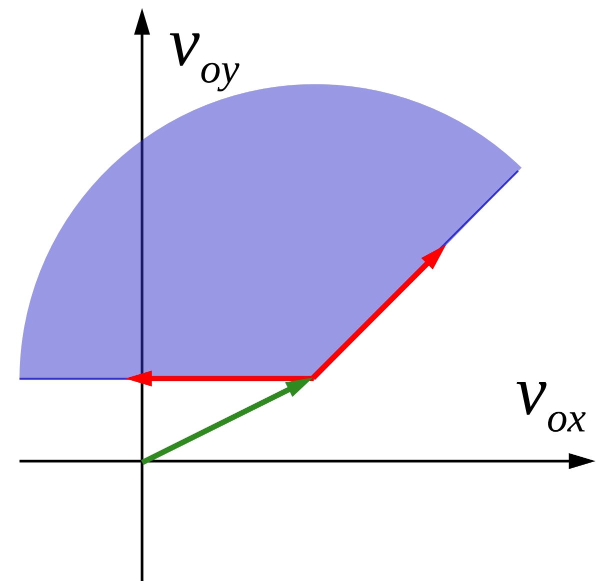
運動制約: $\begin{cases} -v_{oy} + \omega \le 0 \\ v_{ox} - v_{oy} - \omega \le 0 \end{cases}$

$\omega = 0$ の時

$$\begin{cases} v_{oy} \ge 0 \\ v_{oy} \ge v_{ox} \end{cases}$$

$\omega = \pm 1$ の時

$$\begin{cases} v_{oy} \ge \pm 1 \\ v_{oy} \ge v_{ox} \mp 1 \end{cases}$$



許容運動: $\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$