ハンドリング工学特論

大阪大学大学院 工学研究科 マテリアル生産科学専攻
システムインテグレーション講座
デジタル生産システム領域
若松　栄史

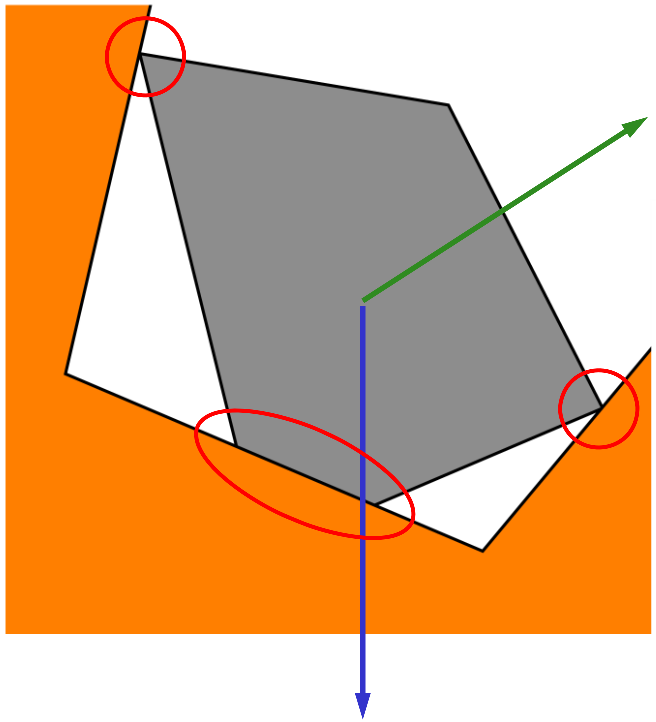
摩　擦

摩擦錐

クーロン・アモントン則：

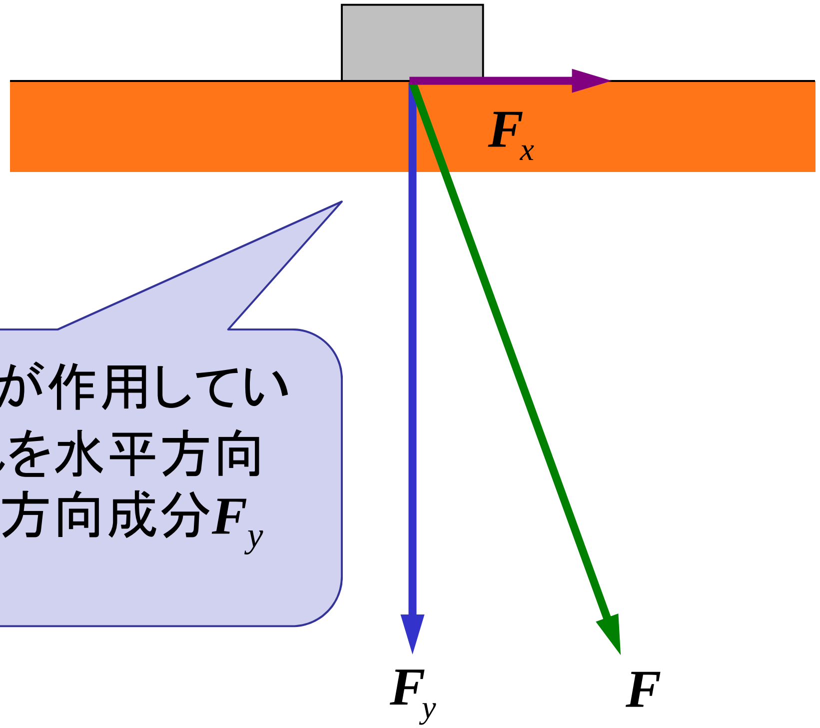
- 垂直荷重と静止摩擦力の大きさの関係を記述
- 力の方向は記述されない

  →多点接触の解析が煩雑になる



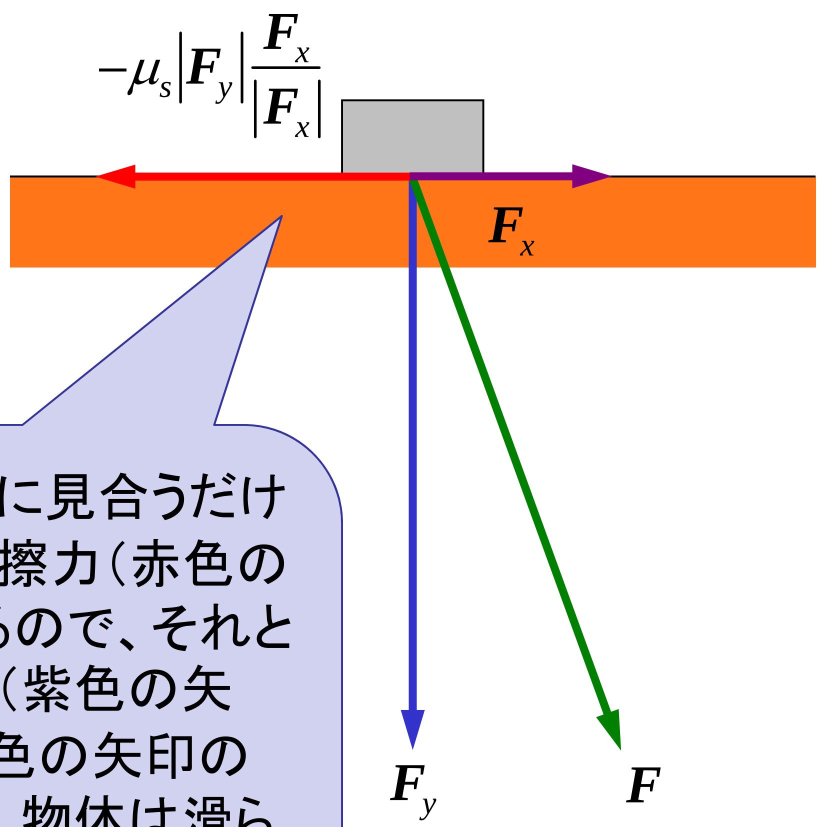
力の方向を容易に考慮できる
静止摩擦の図的表現を導入

二次元摩擦錐の考え方①



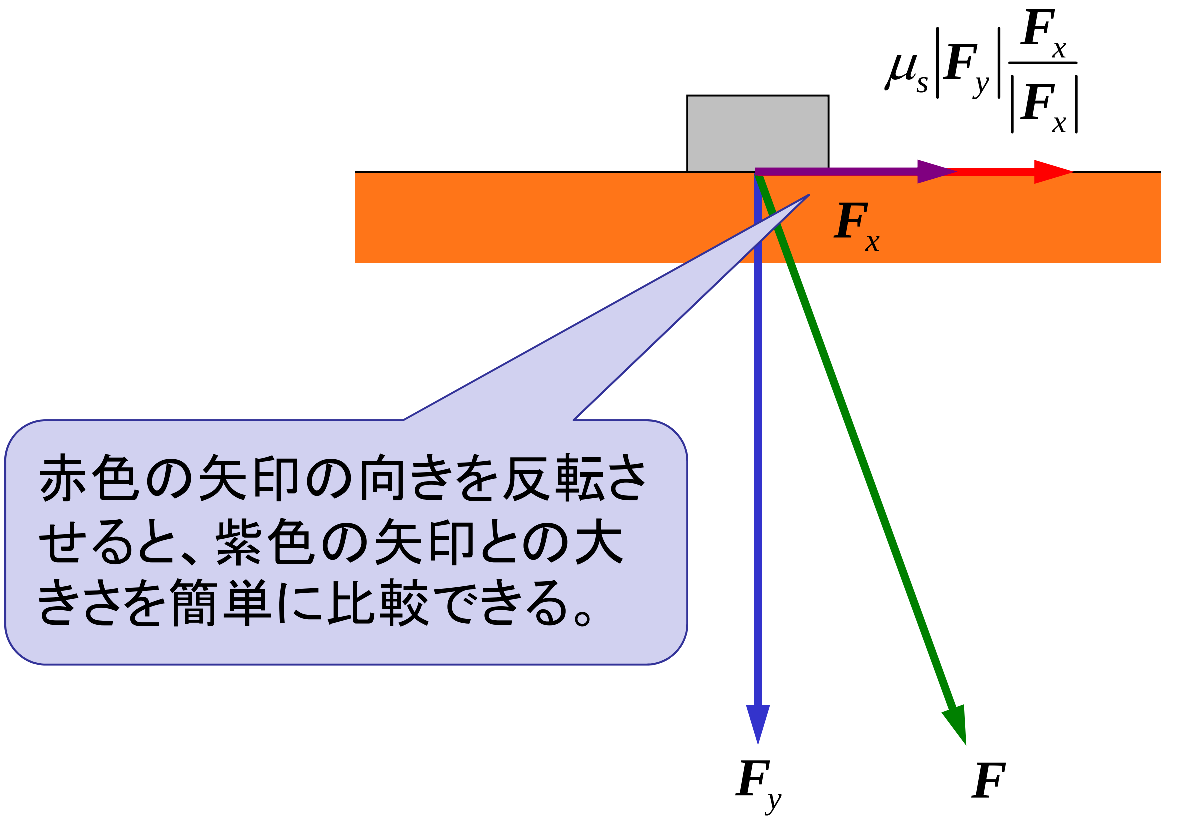
物体に外力$\boldsymbol{F}$が作用しているとして、それを水平方向成分$\boldsymbol{F}_x$と垂直方向成分$\boldsymbol{F}_y$に分ける。

二次元摩擦錐の考え方②



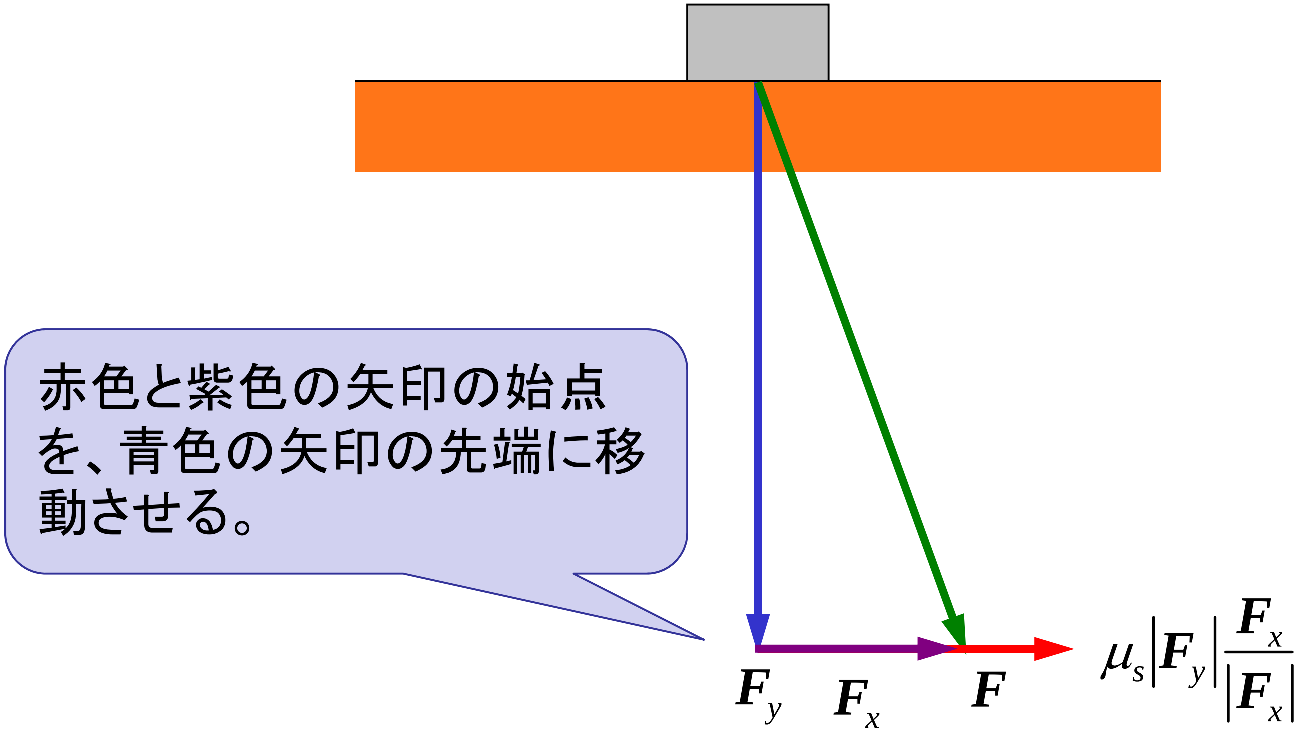
垂直方向成分$\boldsymbol{F}_y$に見合うだけの（最大）静止摩擦力（赤色の矢印）が発生するので、それと水平方向成分$\boldsymbol{F}_x$（紫色の矢印）を比較し、赤色の矢印の方が大きければ、物体は滑らない。が、この図では比較しにくいので…

二次元摩擦錐の考え方③

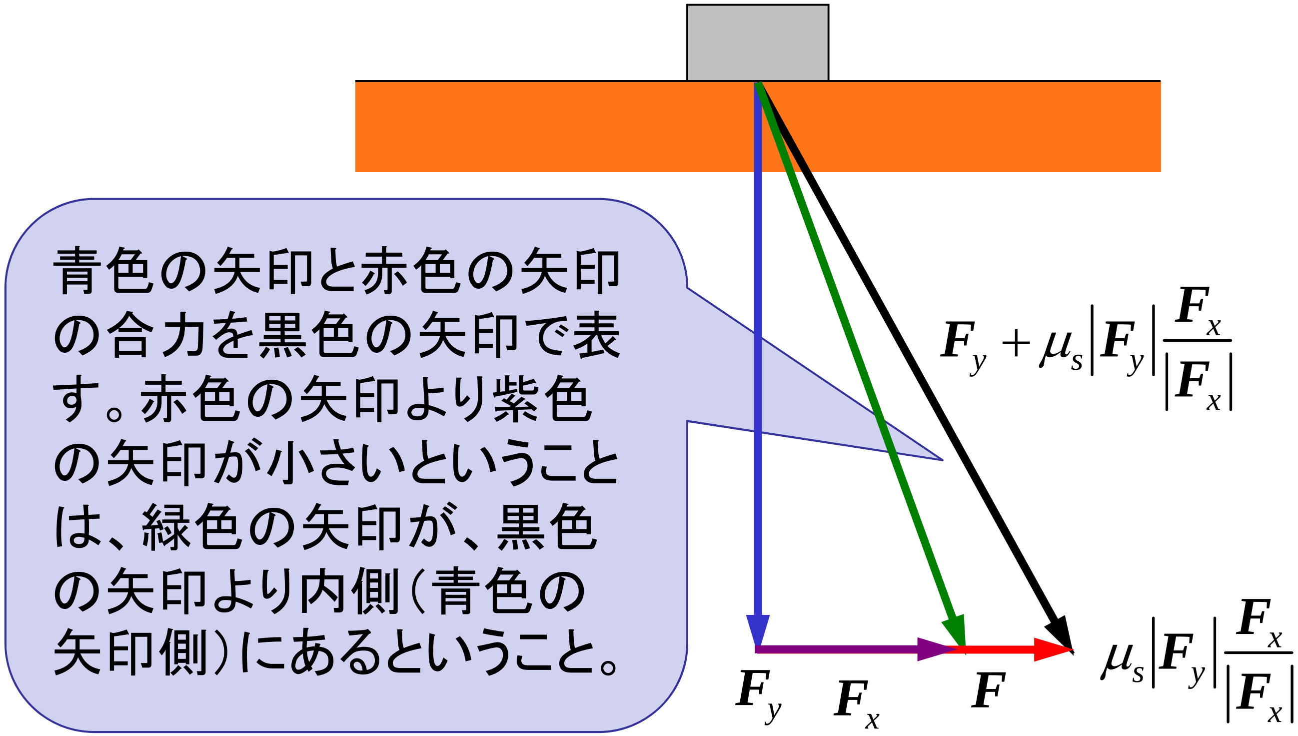


外力$\boldsymbol{F}$の接触面に対する水平成分$\boldsymbol{F}_x$が$\mu_s |\boldsymbol{F}_y| \dfrac{\boldsymbol{F}_x}{|\boldsymbol{F}_x|}$より小さければ滑らない

二次元摩擦錐の考え方④

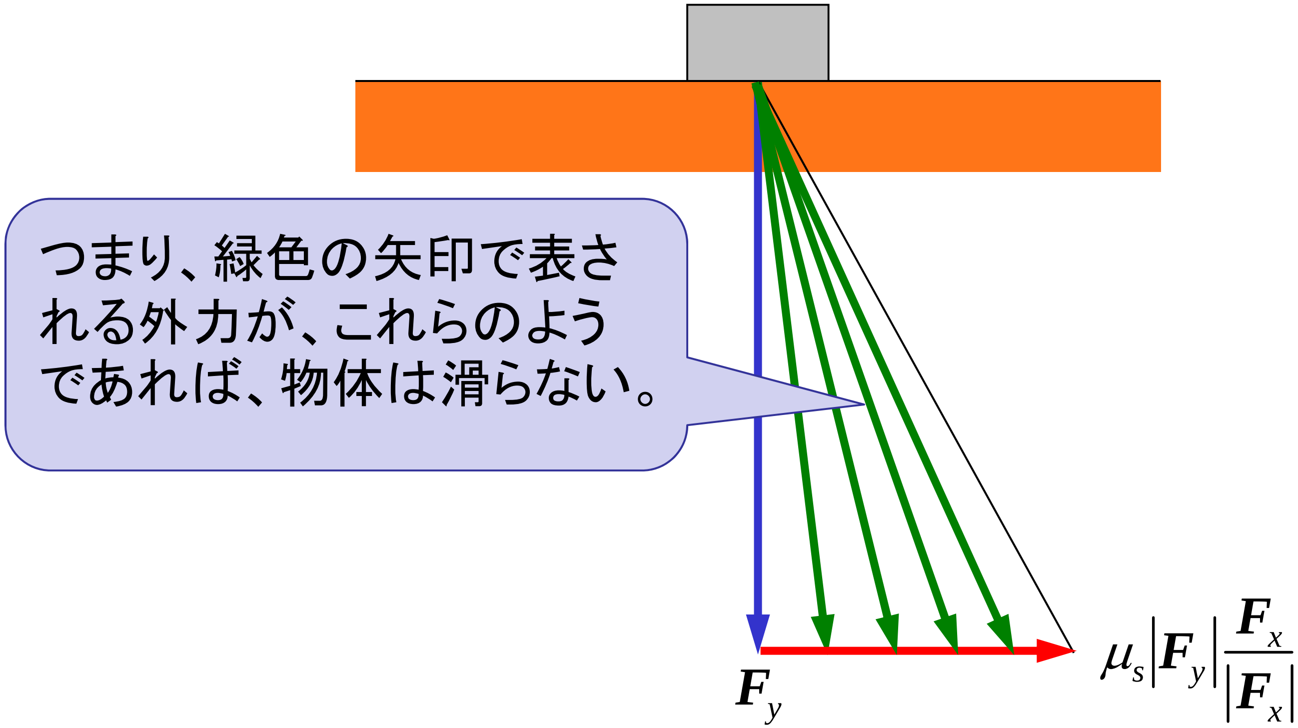


二次元摩擦錐の考え方⑤

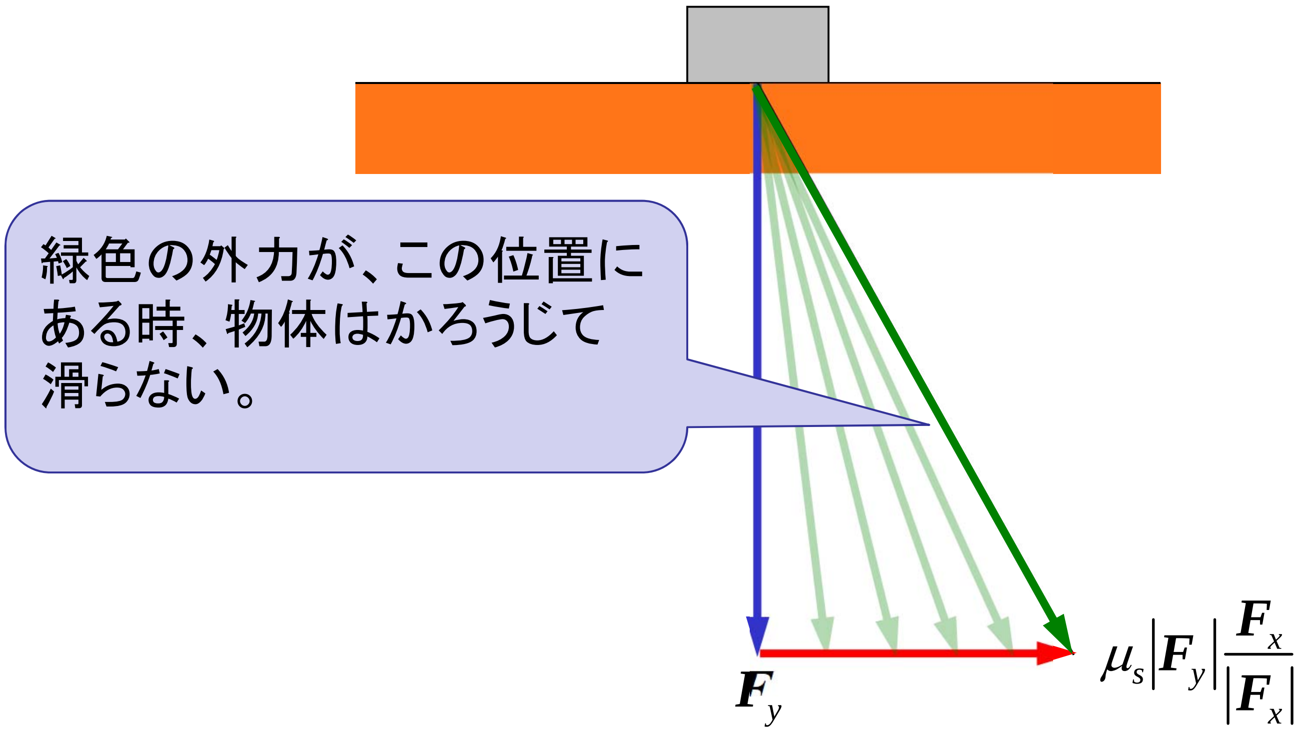


外力$\boldsymbol{F}$が合ベクトル$\boldsymbol{F}_y + \mu_s |\boldsymbol{F}_y| \frac{\boldsymbol{F}_x}{|\boldsymbol{F}_x|}$より内側にあれば滑らない

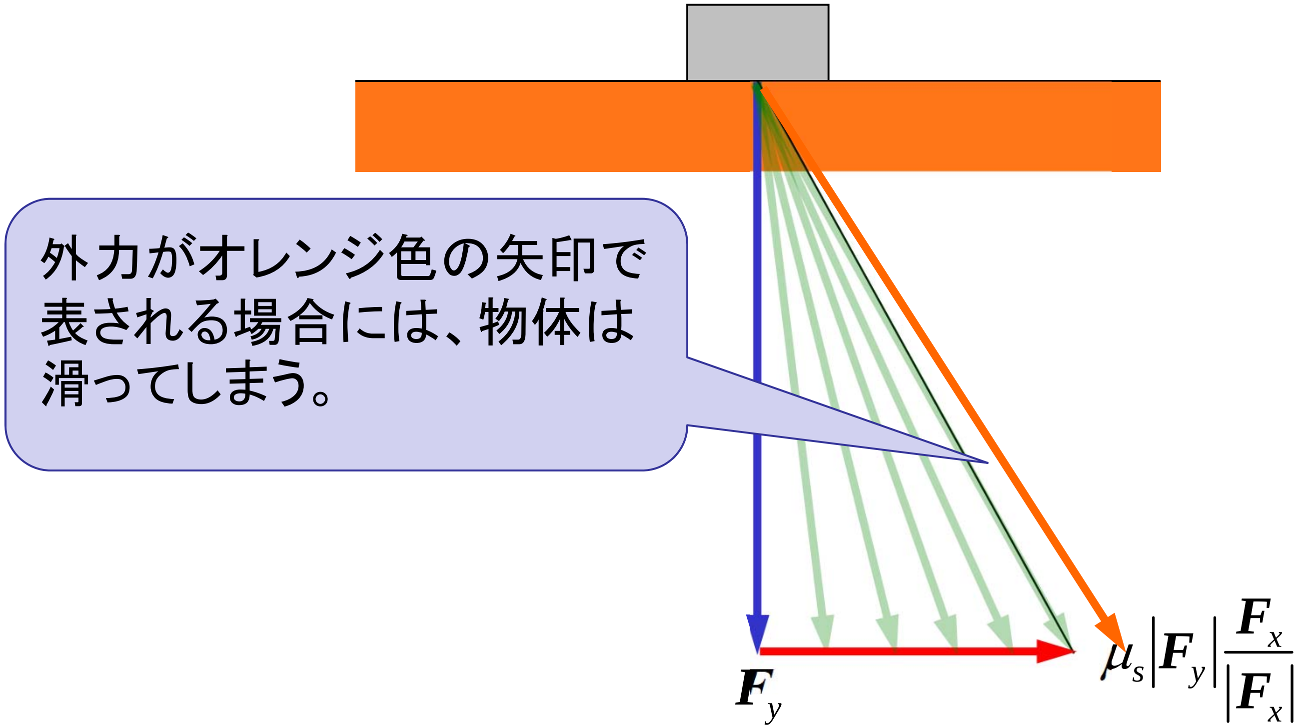
二次元摩擦錐の考え方⑥



二次元摩擦錐の考え方⑦

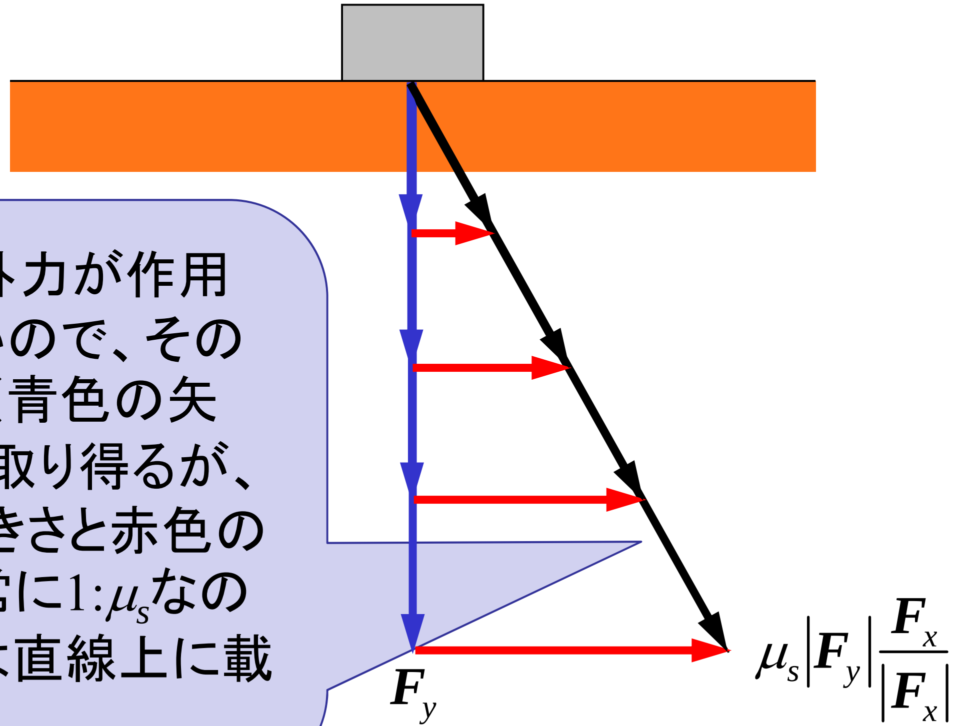


二次元摩擦錐の考え方⑧



外力Fが合ベクトル$F_y + \mu_s |F_y| \frac{F_x}{|F_x|}$より内側にあれば滑らない

二次元摩擦錐の考え方⑨



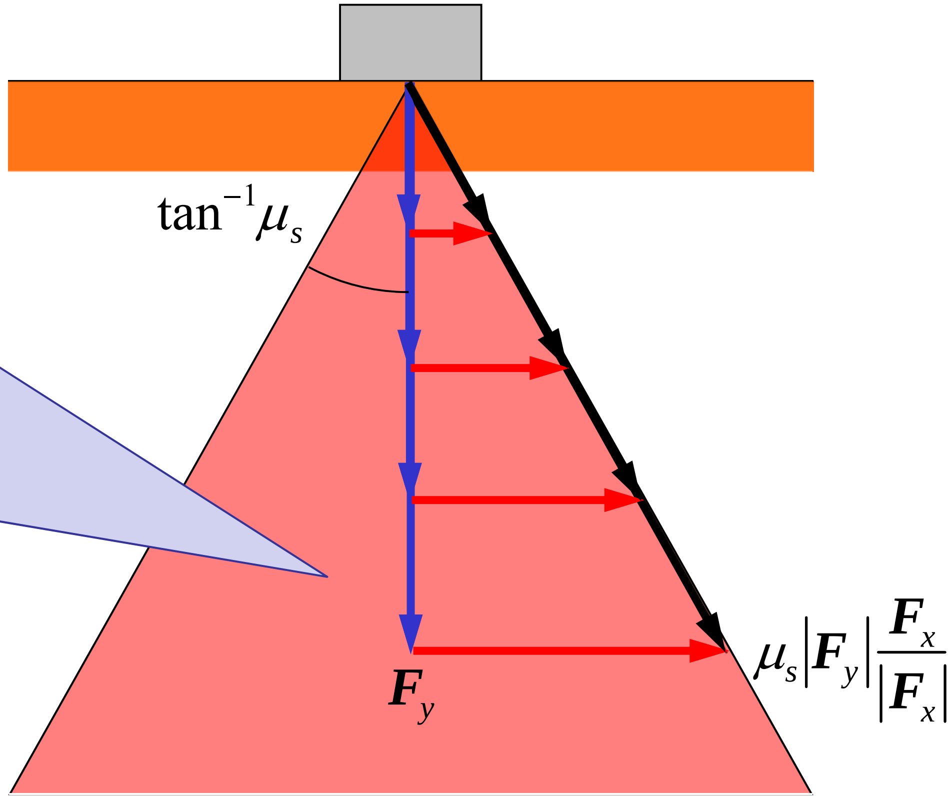
実際にはどんな外力が作用するか分からないので、その垂直方向成分F_y（青色の矢印）も色々な値を取り得るが、青色の矢印の大きさと赤色の矢印の大きさは常に$1:\mu_s$なので、黒色の矢印は直線上に載る。

外力Fの接触面に対する垂直成分F_yと$\mu_s |F_y| \frac{F_x}{|F_x|}$の比は常に$1 : \mu_s$

二次元摩擦錐の考え方⑩

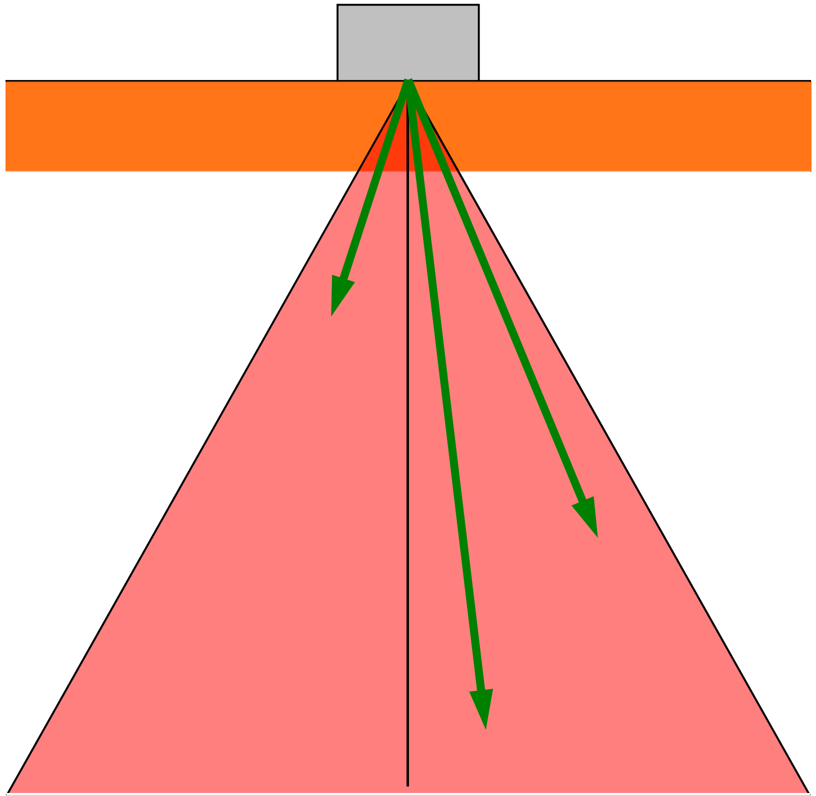
摩擦錐(friction cone)

反対方向も同じように考えることができるので、μ_sが与えられれば、黒い矢印を二つの稜線とする赤色の錐を定義することができる。これを摩擦錐と呼ぶ。



外力$\boldsymbol{F}$の接触面に対する垂直成分$\boldsymbol{F}_y$と$\mu_s|\boldsymbol{F}_y|\dfrac{\boldsymbol{F}_x}{|\boldsymbol{F}_x|}$の比は常に$1:\mu_s$

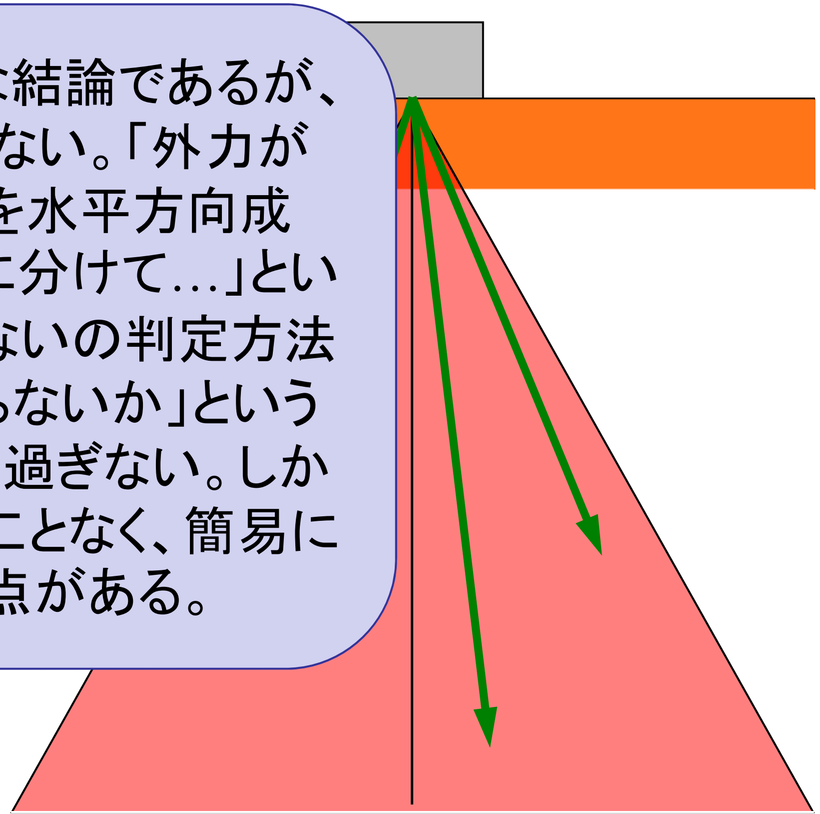
二次元摩擦錐の考え方⑪



任意の大きさを持つ外力Fが、μ_sによって決定される摩擦錐の内部か境界上にある場合には滑らない（静止状態を保つ）

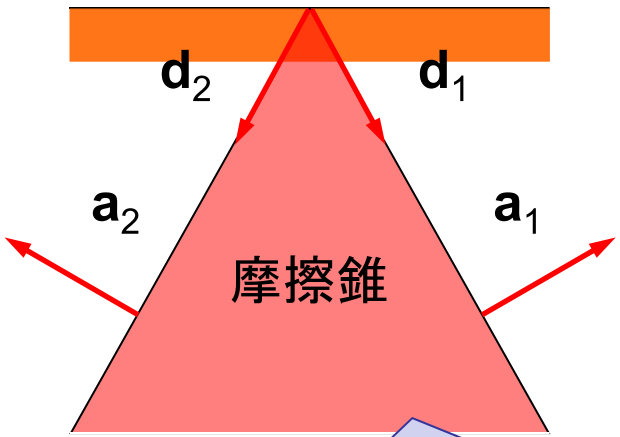
二次元摩擦錐の考え方⑫

これが極めて重要な結論であるが、全く新しい概念ではない。「外力が与えられたら、それを水平方向成分と垂直方向成分に分けて…」という従来の滑る・滑らないの判定方法を、「錐に入るか入らないか」という別な表現で表したに過ぎない。しかし、外力を分解することなく、簡易に判定できるという利点がある。



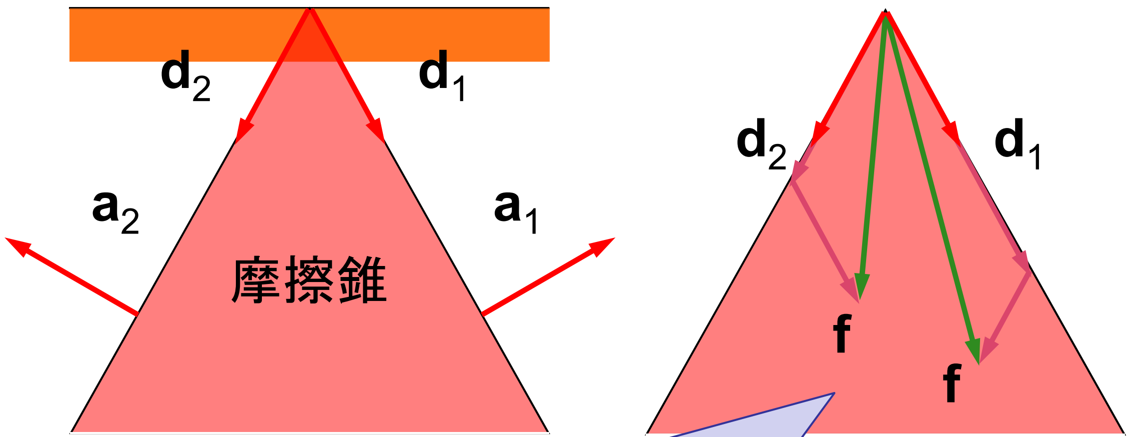
任意の大きさを持つ外力Fが、μ_sによって決定される**摩擦錐の内部か境界上にある場合には滑らない（静止状態を保つ）**

二次元摩擦錐による安定条件①



二次元での摩擦錐は、d_iのような稜線ベクトル、あるいはa_iのような外向き法線ベクトルによって特徴づけられるので、これらを用いて、外力が錐に含まれるか否かを、図的・幾何学的にではなく、解析的に判断する。まずは稜線ベクトルに着目する場合…

二次元摩擦錐による安定条件②

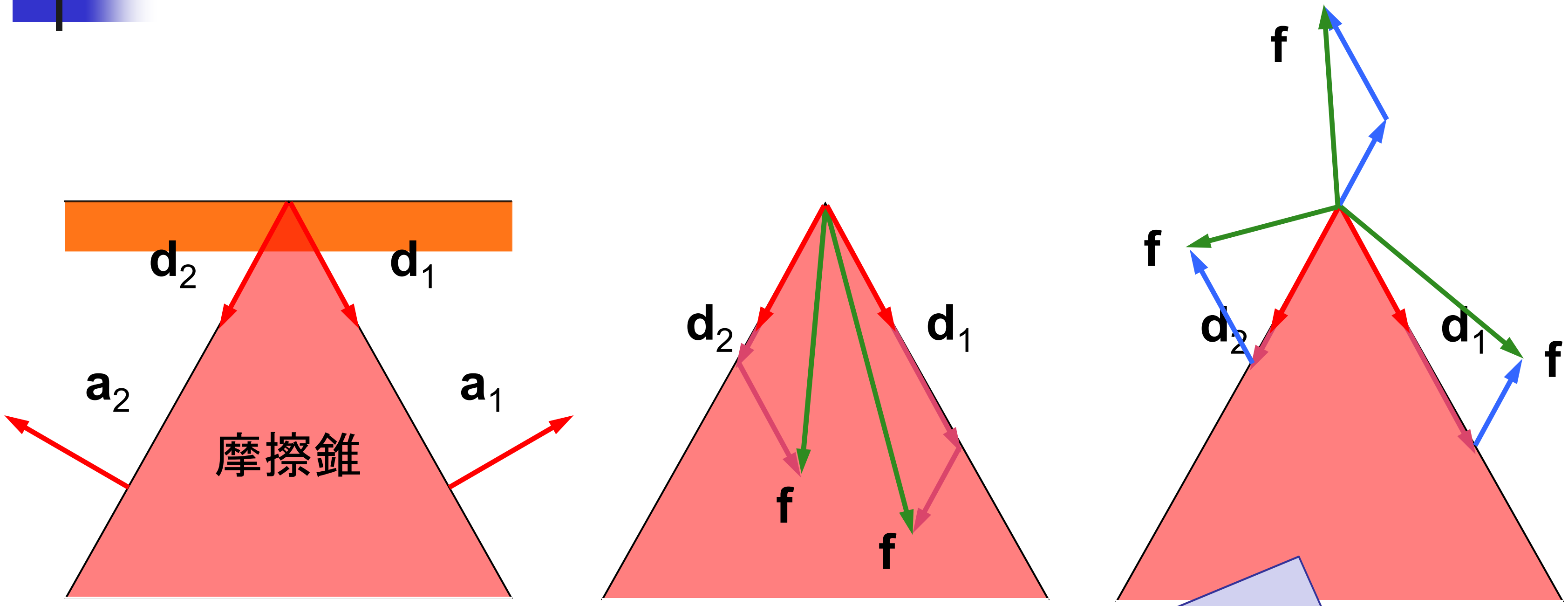


一般的に、緑色の外力は、稜線ベクトルの線形結合、すなわち

$$\boldsymbol{f} = R_1 \boldsymbol{d}_1 + R_2 \boldsymbol{d}_2$$

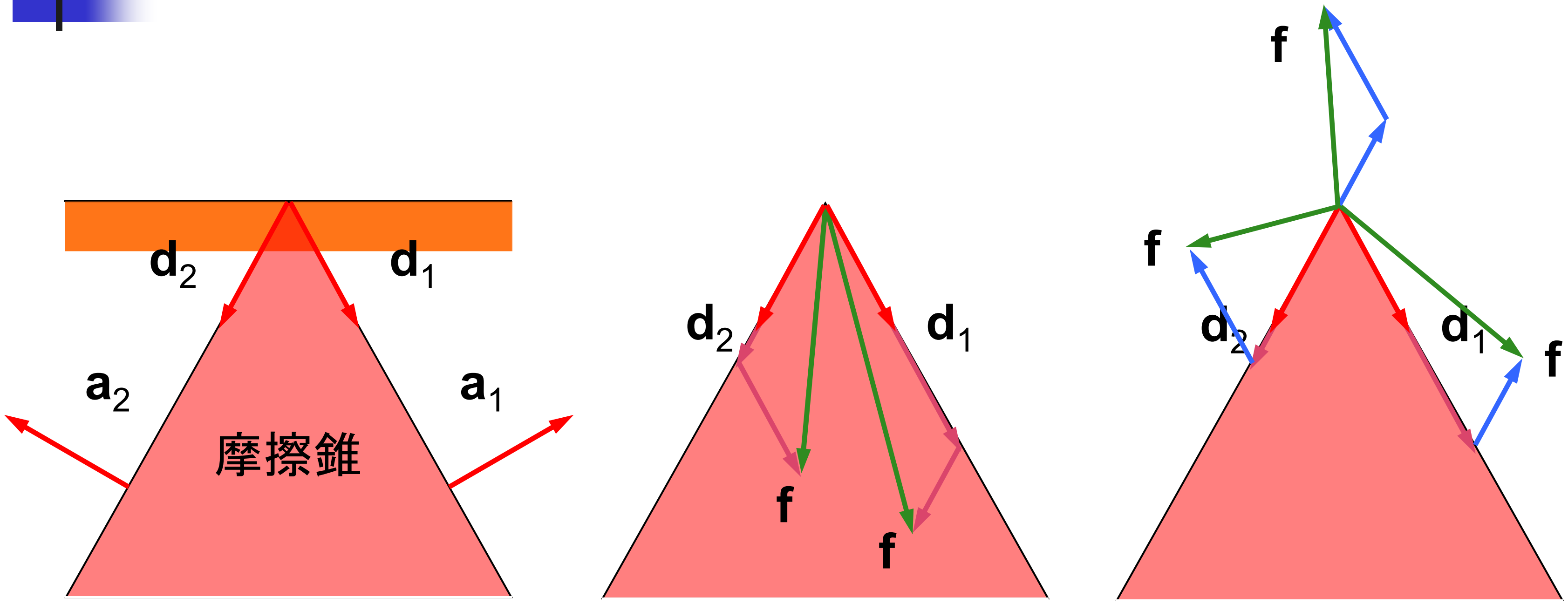
と表すことができる。この時、R_1、R_2が両方とも正または0であれば、図のように、外力$\boldsymbol{f}$は必ず錐に含まれる。

二次元摩擦錐による安定条件③



R_1、R_2の一方、あるいは両方が負である場合には、図のように、外力$\boldsymbol{f}$は錐には含まれない。

二次元摩擦錐による安定条件④

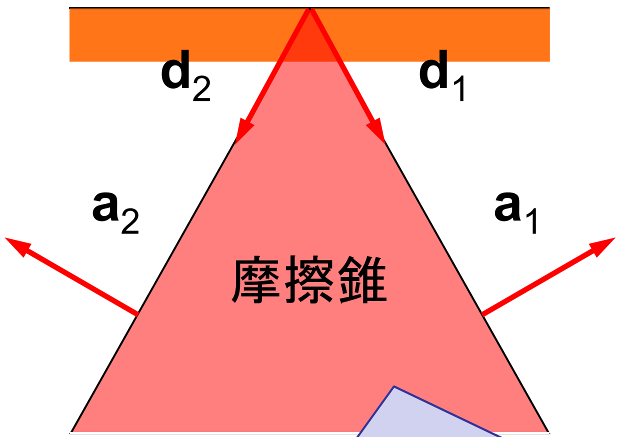


外力fが摩擦錐の中に含まれるための条件:

$$\exists R_1, R_2 \geq 0 \text{ s.t. } R_1 \boldsymbol{d}_1 + R_2 \boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{f}$$

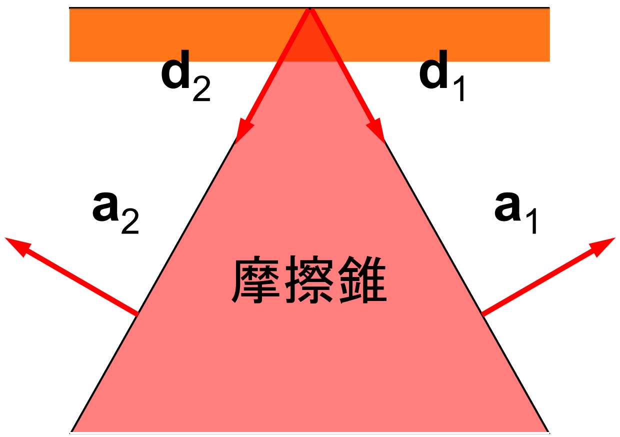
→解析的に判定可能

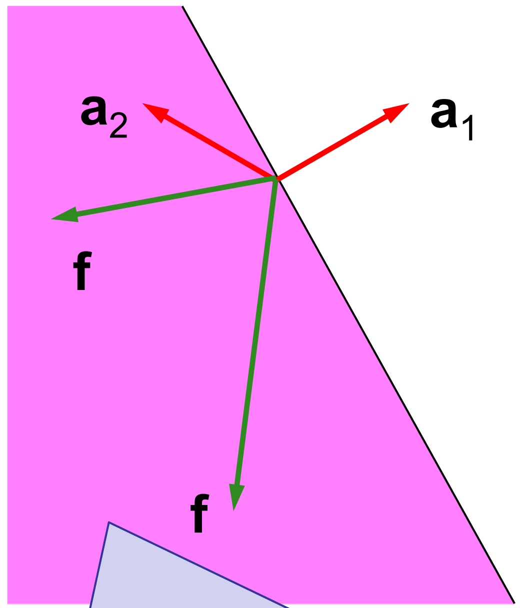
二次元摩擦錐による安定条件⑤



次は、（外向き）法線ベクトルに着目する場合。法線ベクトルのみを取り出して、…

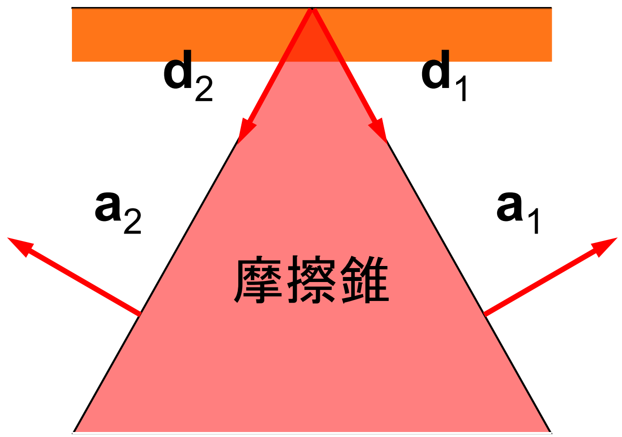
二次元摩擦錐による安定条件⑥

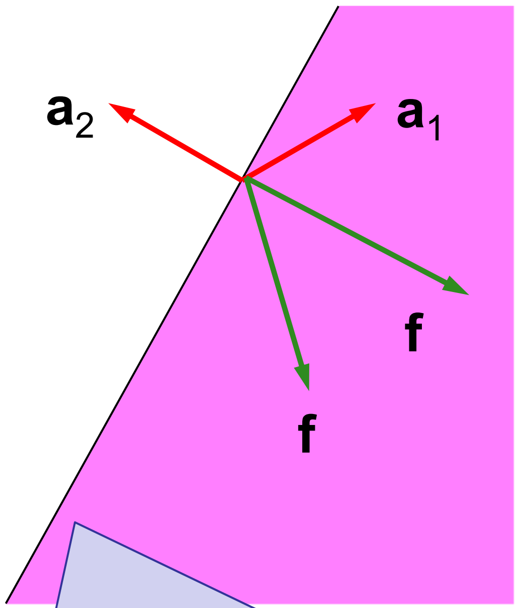




始点を一致させる。まずは、$\boldsymbol{a}_1$との内積を考えた場合、上図のピンク色の領域に存在する緑色の外力$\boldsymbol{f}$は、$\boldsymbol{a}_1$との内積が負または0となる。

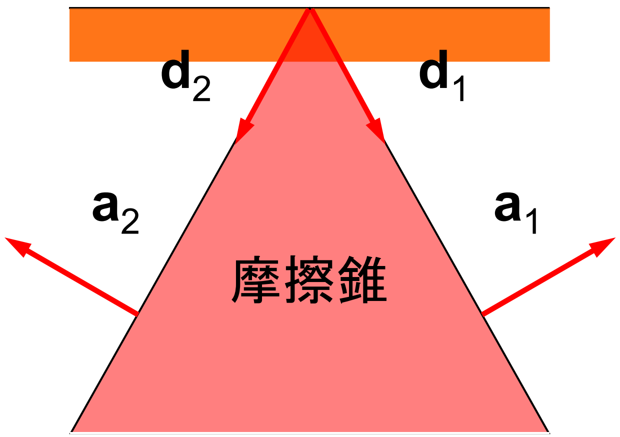
二次元摩擦錐による安定条件⑦

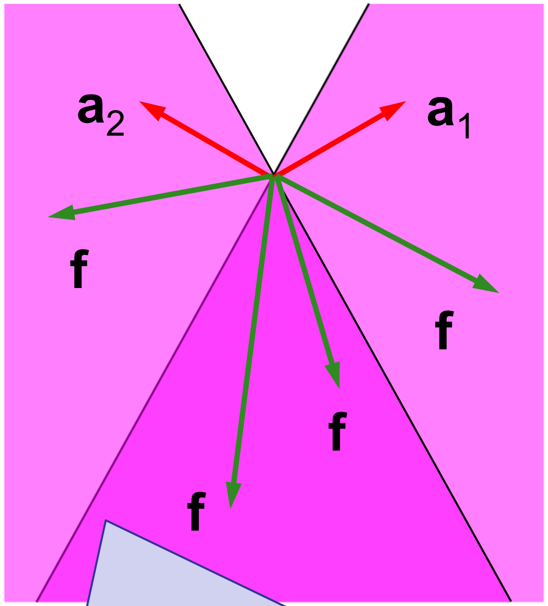




同じように、$\boldsymbol{a}_2$との内積を考えた場合、上図のピンク色の領域に存在する緑色の外力$\boldsymbol{f}$ は、$\boldsymbol{a}_2$との内積が負または0となる。

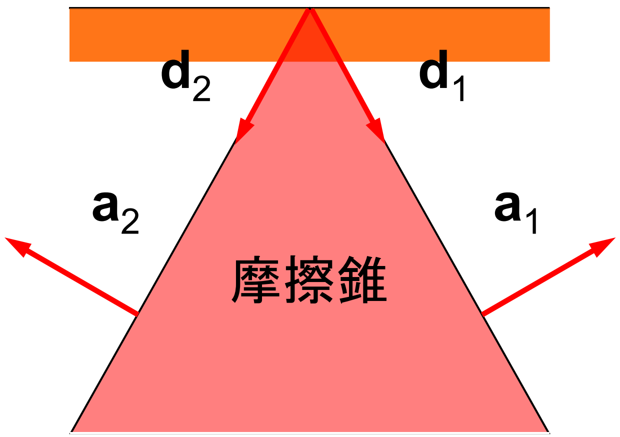
二次元摩擦錐による安定条件⑧

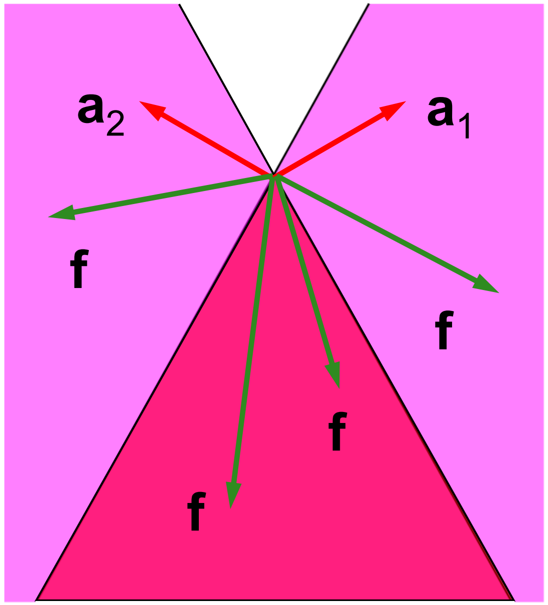




両方を重ね合わせた場合、$\boldsymbol{a}_1$および$\boldsymbol{a}_2$との内積が共に負または0となる外力$\boldsymbol{f}$は、錐の内部に含まれることが分かる。

二次元摩擦錐による安定条件⑨



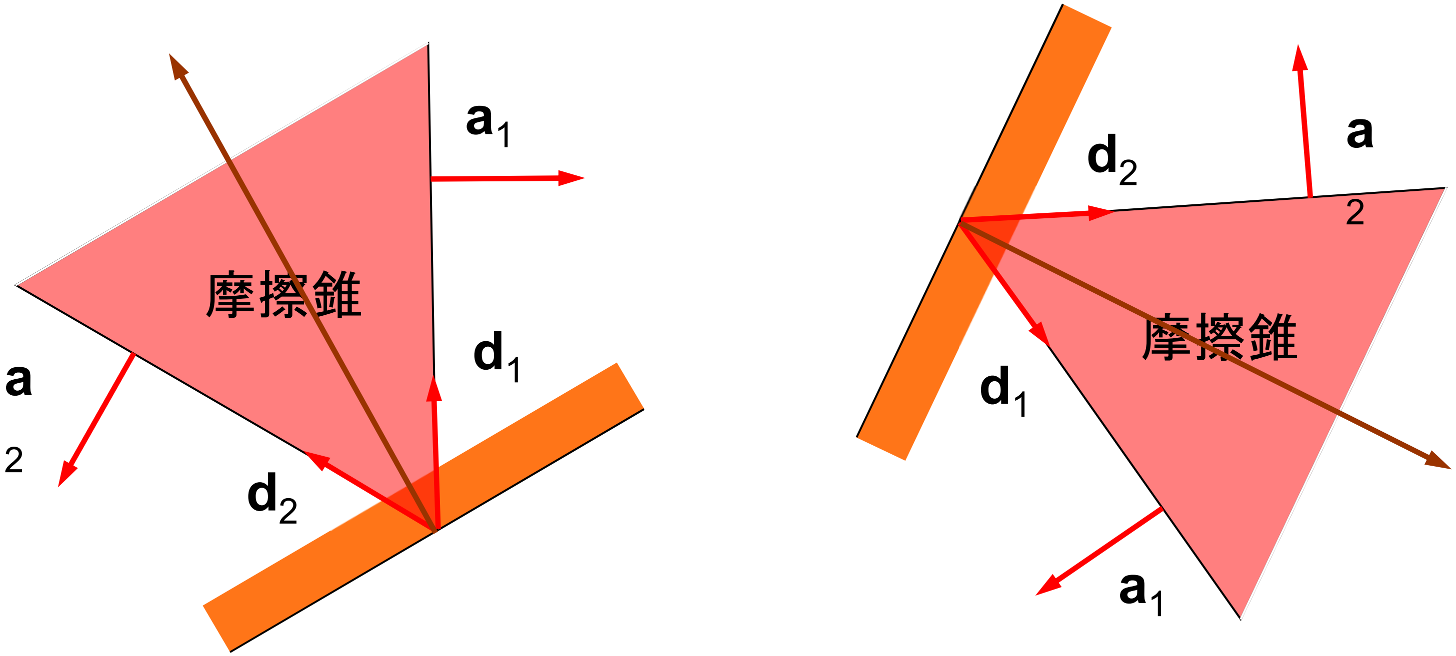


外力fが摩擦錐の中に含まれるための条件:

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{f} \leq 0 \ \text{ and } \ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{f} \leq 0$$

→解析的に判定可能

摩擦錐の方向

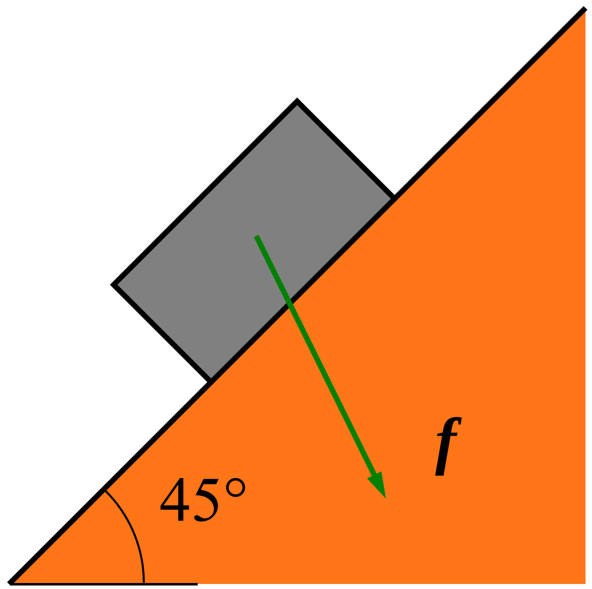


注意！：摩擦錐は、その定義から、必ず**接触面の法線軸**に対して対称

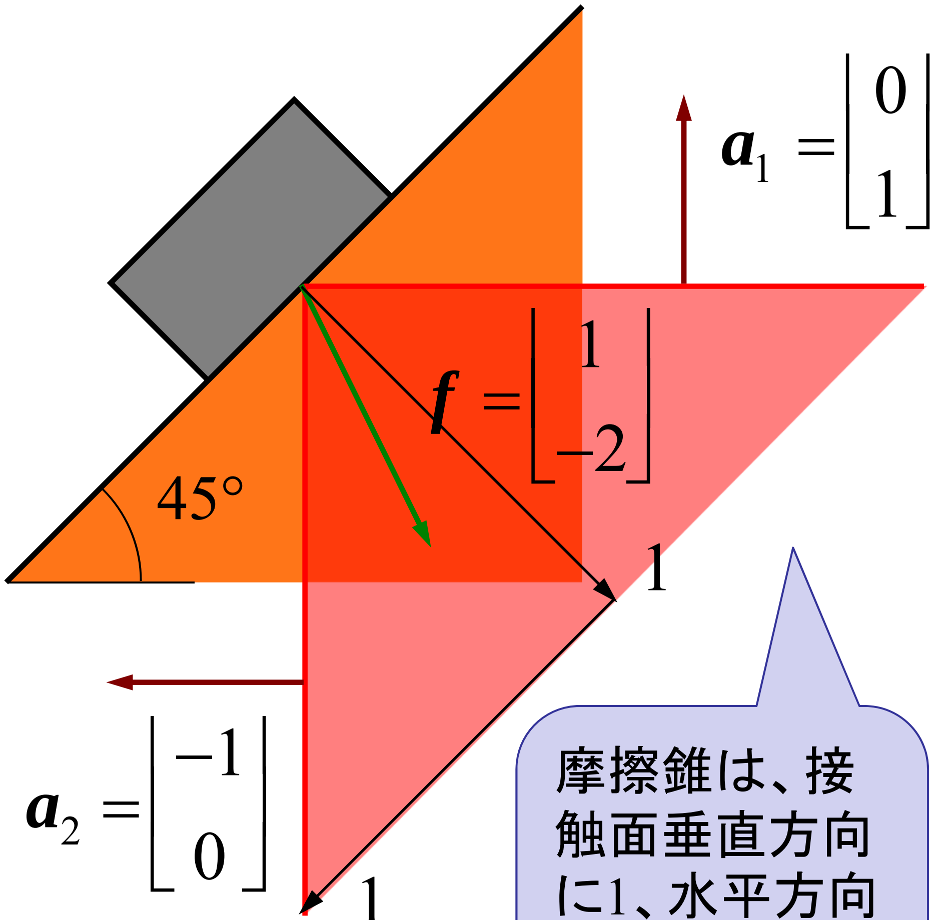
これまでの試験で、ここを間違える学生が多いです。接触している物体の形状に惑わされずに、接触面の向きに着目して下さい。

摩擦錐を用いた安定性判定例①

図のような状態の物体に力 $\boldsymbol{f}$=[1, -2]^T を加えた時、物体が滑るかどうかを、摩擦錐の考え方から判定せよ。判定の過程も記せ。なお、物体と斜面との間の静止摩擦係数は μ_s=1.0 とする。



摩擦錐を用いた安定性判定例②



物体が滑らないためには

$$a_1 \cdot f \le 0,\ a_2 \cdot f \le 0$$

であればよい。

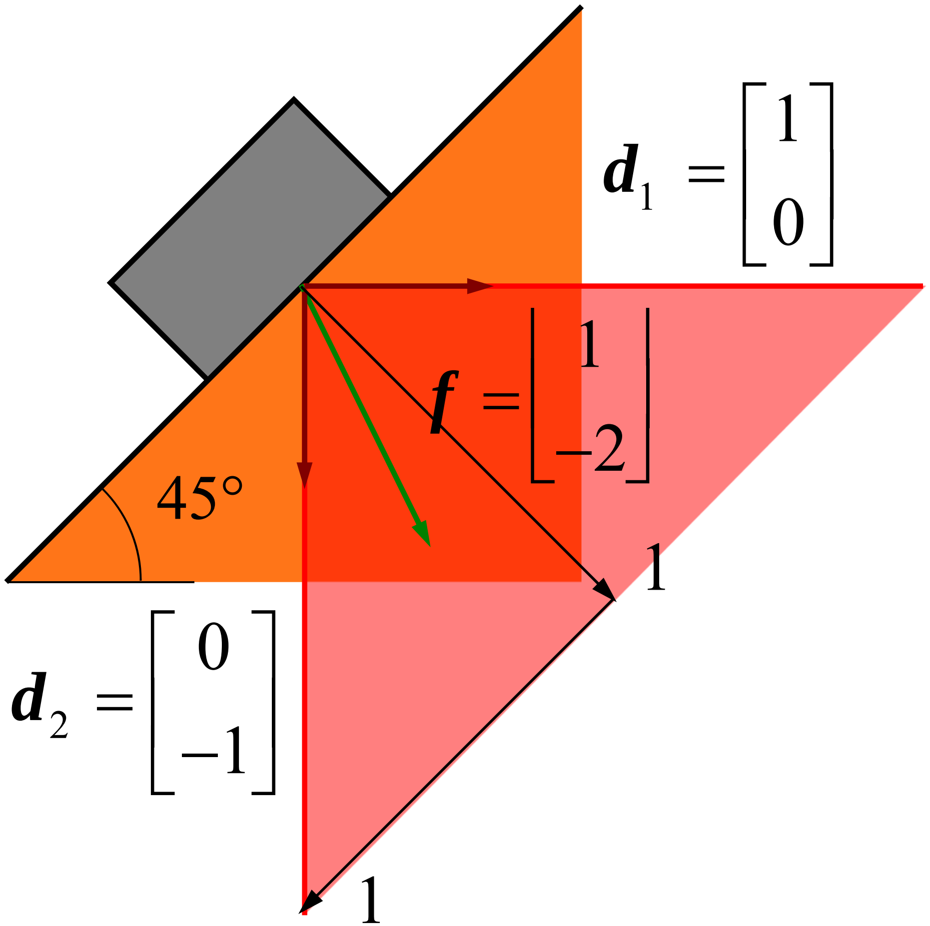
$$a_1 \cdot f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \le 0$$

$$a_2 \cdot f = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1 \le 0$$

摩擦錐は、接触面垂直方向に1、水平方向にμ_s（片側）の開き具合。

よって、物体は滑らない。

摩擦錐を用いた安定性判定例③



物体が滑らないためには
以下の式において

$$R_1 \geq 0, \quad R_2 \geq 0$$

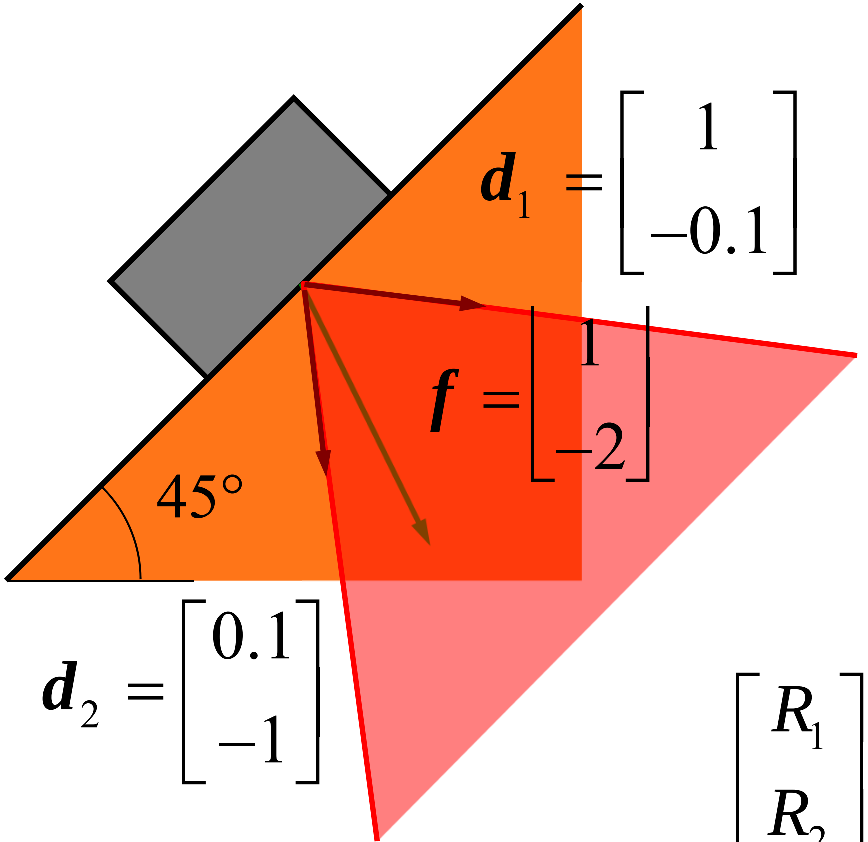
であればよい。

$$R_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = 1 \geq 0, \quad R_2 = 2 \geq 0$$

よって、物体は滑らない。

摩擦錐を用いた安定性判定例④



$$\boldsymbol{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{d}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix} + R_2 \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

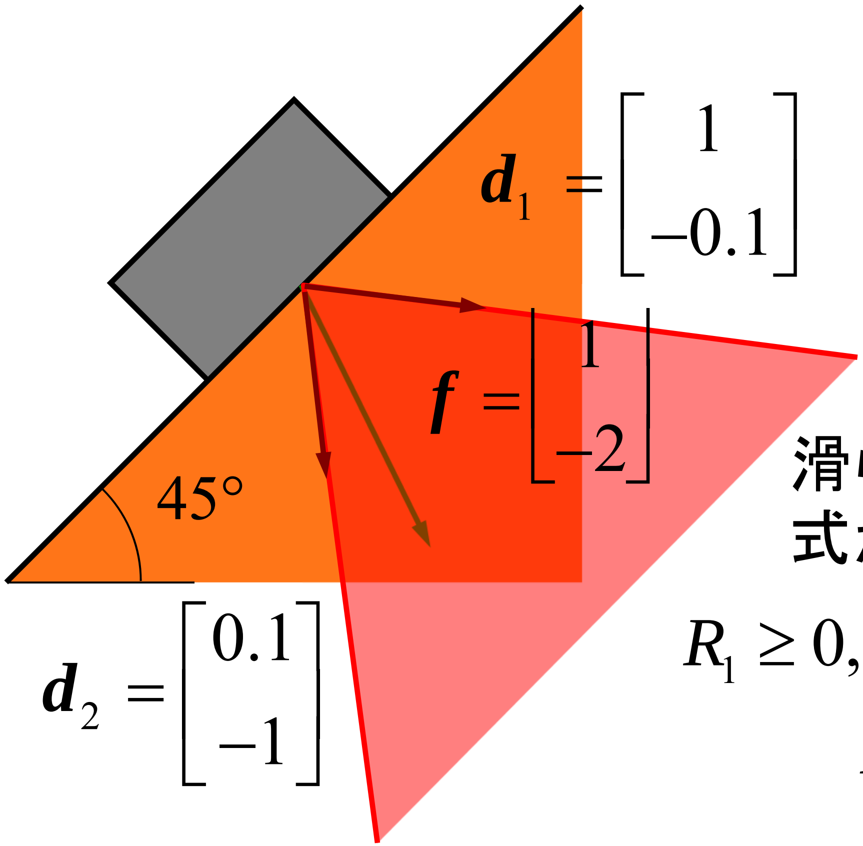
$$\begin{cases} 10R_1 + R_2 = 10 \\ -R_1 - 10R_2 = -20 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{99} \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{99} \begin{bmatrix} 80 \\ 190 \end{bmatrix}$$

よって、物体は滑らない。

摩擦錐を用いた安定性判定例⑤



$$\begin{cases} 10R_1 + R_2 = 10 \\ -R_1 - 10R_2 = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2 = -10R_1 + 10 \\ R_2 = 0.1R_1 + 2 \end{cases}$$

滑らないためには、以下の不等式が全て満たされればよい。

$$R_1 \geq 0, \quad -10R_1 + 10 \geq 0, \quad 0.1R_1 + 2 \geq 0$$

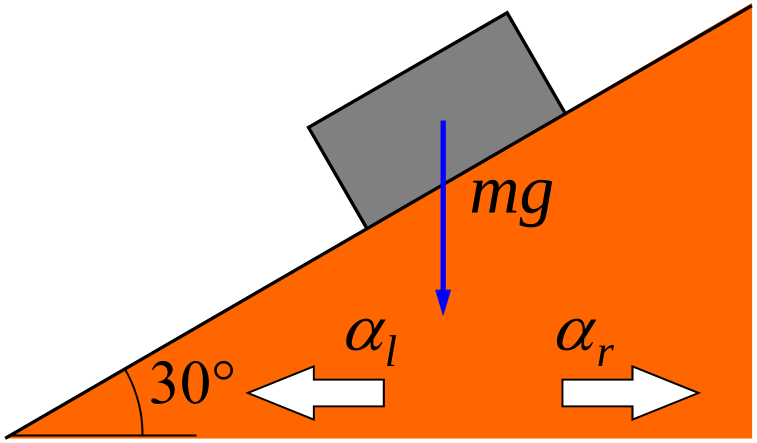
$$R_1 \geq 0, \quad R_1 \leq 1, \quad R_1 \geq -20$$

$$0 \leq R_1 \leq 1$$

全ての不等式を満たすR_1が存在するので、物体は滑らない。

例題

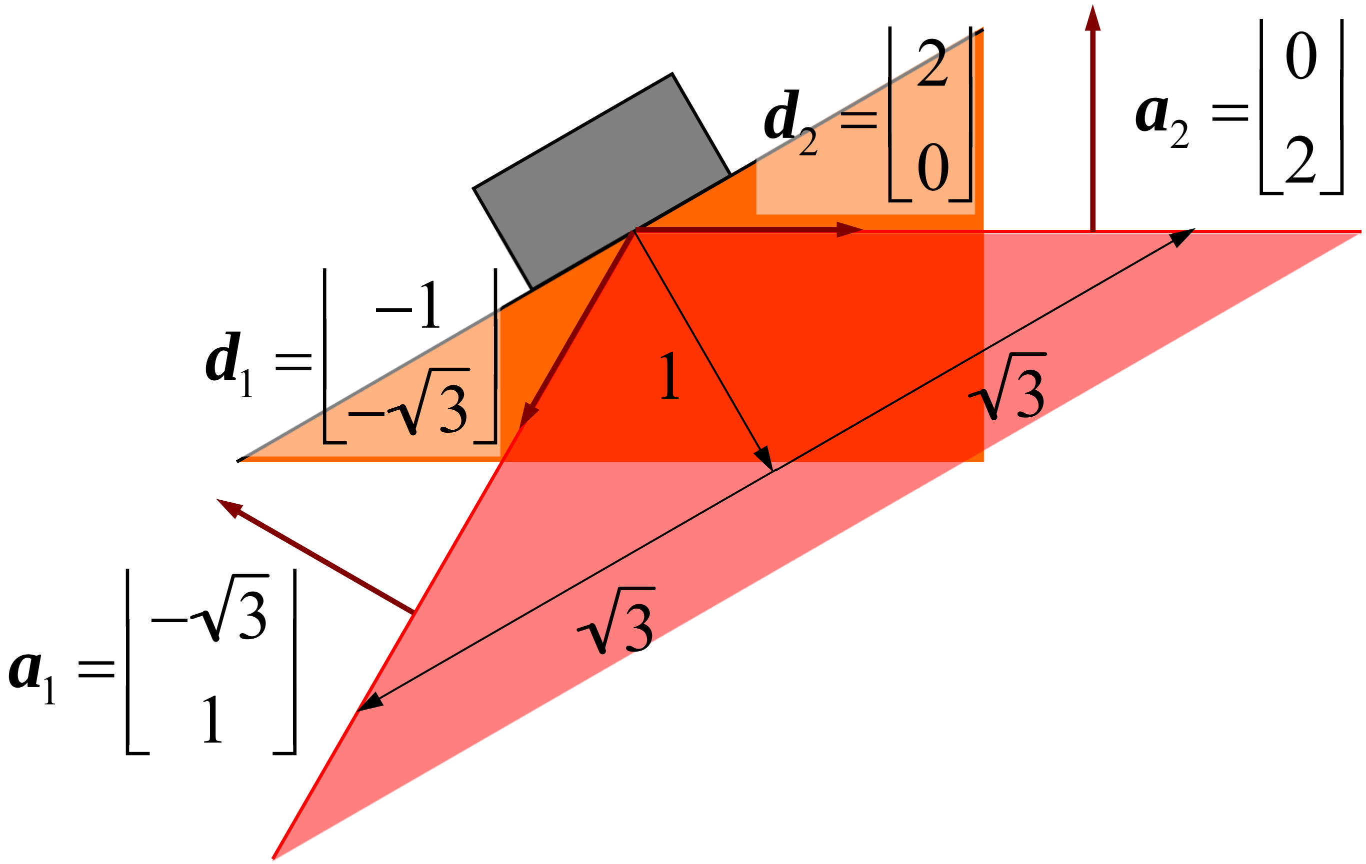
以下の問いに答えよ。



左図のように，斜度30°の斜面に物体が置かれている。物体には図のように、常に荷重 mg が作用しているものとする。また、物体と斜面との最大静止摩擦係数を $\mu_s = \sqrt{3}$ とする。

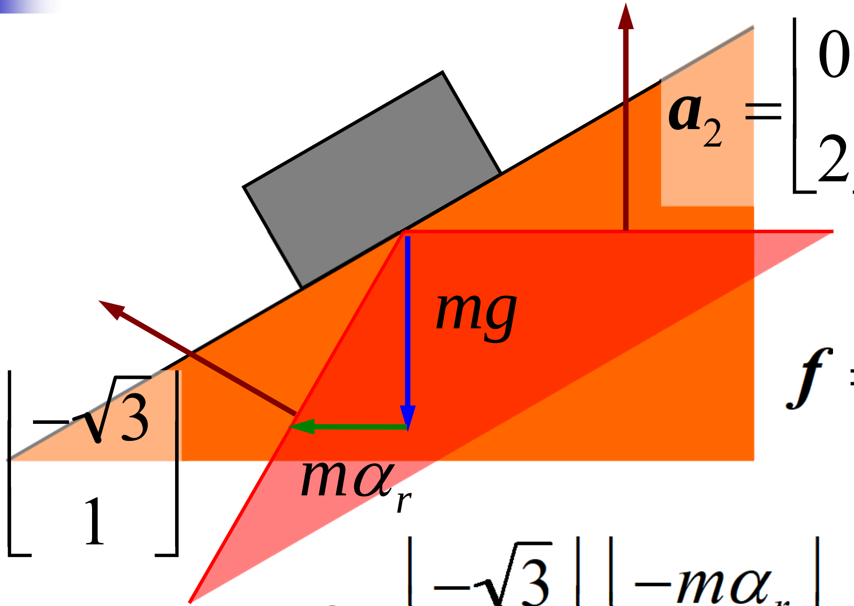
1. 摩擦錐の法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ を求めよ。なお、$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ は単位ベクトルである必要はない。
2. 斜面が大きさ α_r の加速度で右方向に向かって動くものとする．物体が斜面上を滑らないようにするためには、α_r はどのような条件を満たさなければならないか。
3. 斜面が大きさ α_l の加速度で左方向に向かって動くものとする．物体が斜面上を滑らないようにするためには、α_l はどのような条件を満たさなければならないか。

例題の解答①



$d_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
$d_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$
1
$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
$a_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

例題の解答②



$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

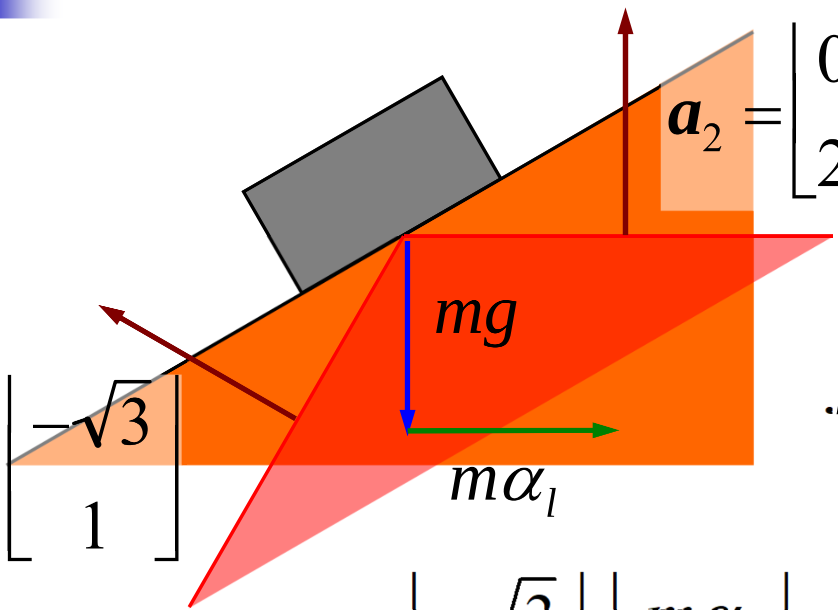
$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m\alpha_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m\alpha_r \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -m\alpha_r \\ -mg \end{bmatrix} = \sqrt{3}m\alpha_r - mg \leq 0$$

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -m\alpha_r \\ -mg \end{bmatrix} = -2mg < 0$$

よって $\alpha_r \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} g$ であれば物体は斜面上で静止する

例題の解答③



$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

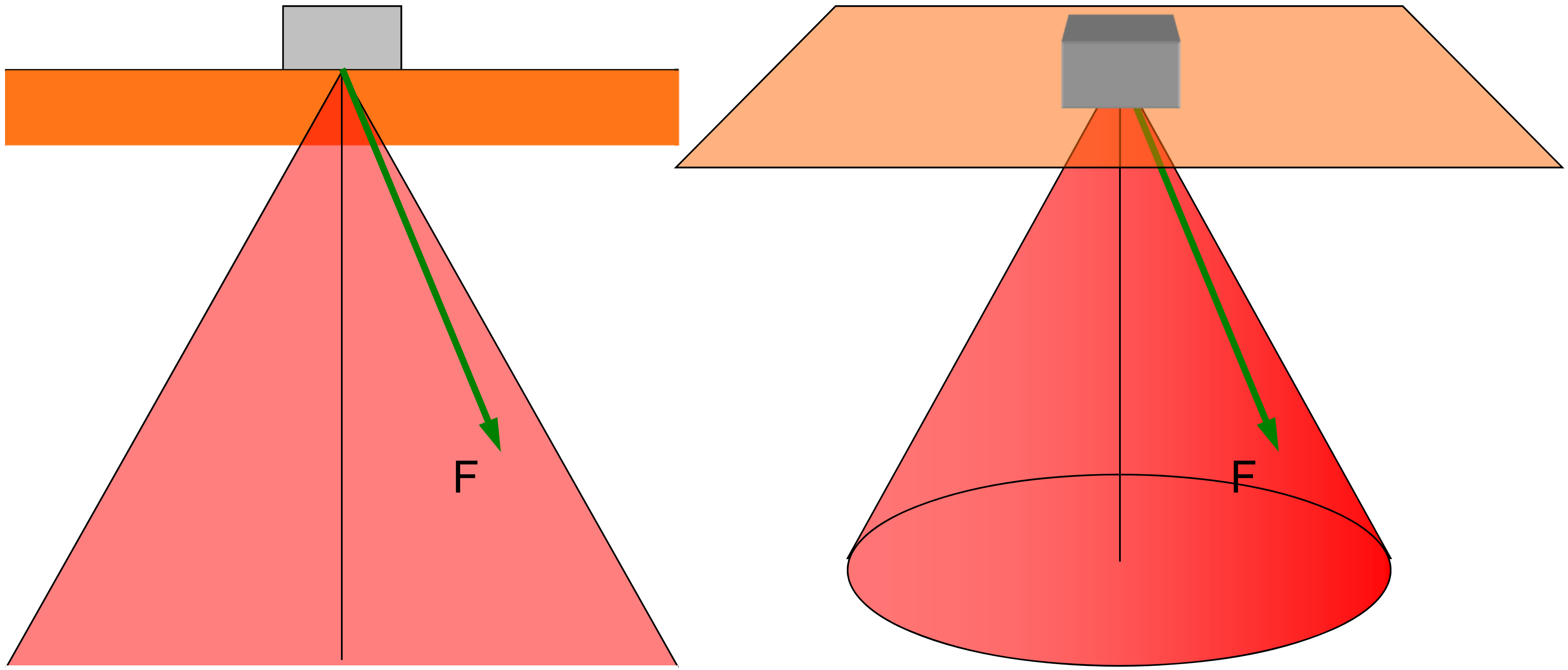
$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\alpha_l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\alpha_l \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\alpha_l \\ -mg \end{bmatrix} = -\sqrt{3}m\alpha_l - mg < 0$$

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\alpha_l \\ -mg \end{bmatrix} = -2mg < 0$$

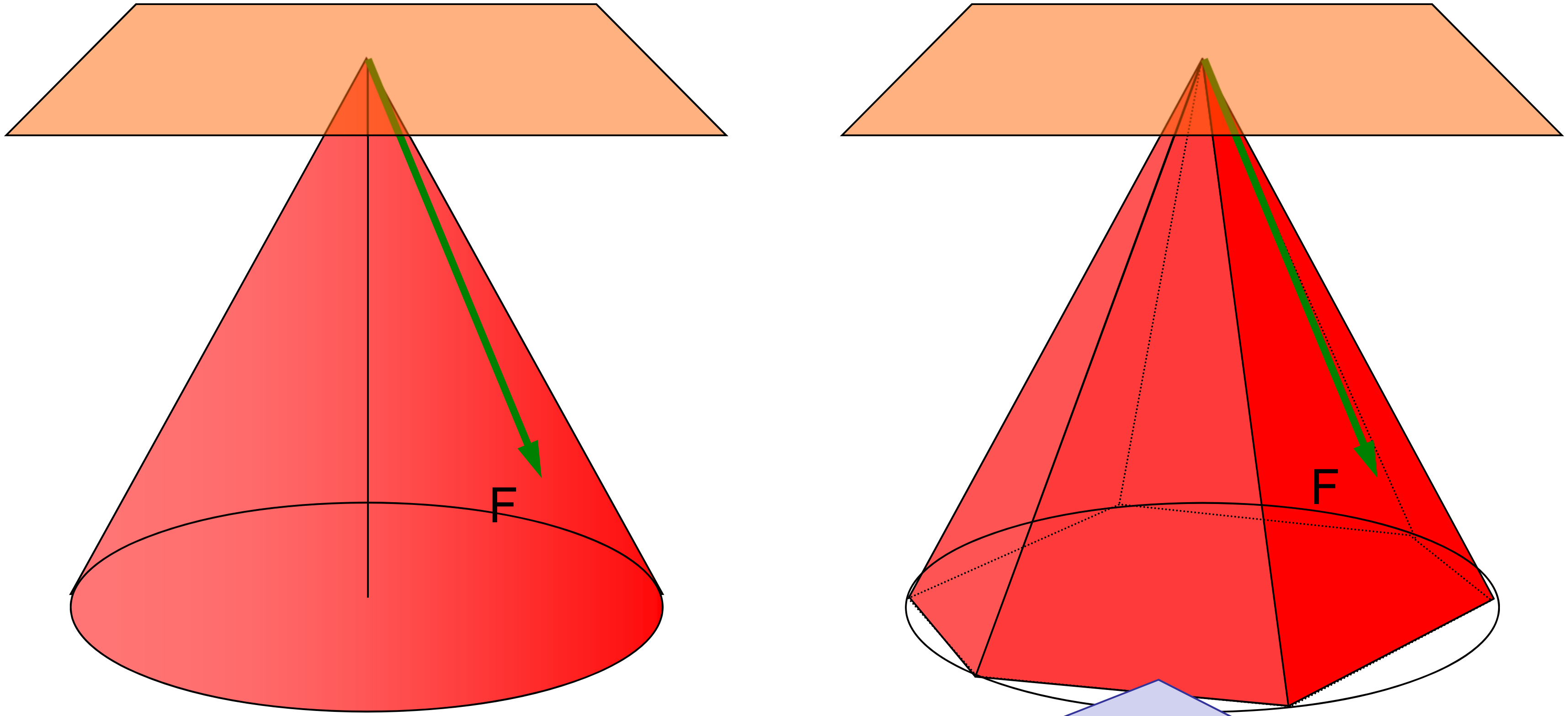
よって任意のα_lに対して物体は斜面上で静止する

二次元摩擦錐と三次元摩擦円錐



これまでの話を三次元に拡張する。三次元の場合、(どの方向にも同じように摩擦が作用するのであれば)摩擦錐は円錐となる。

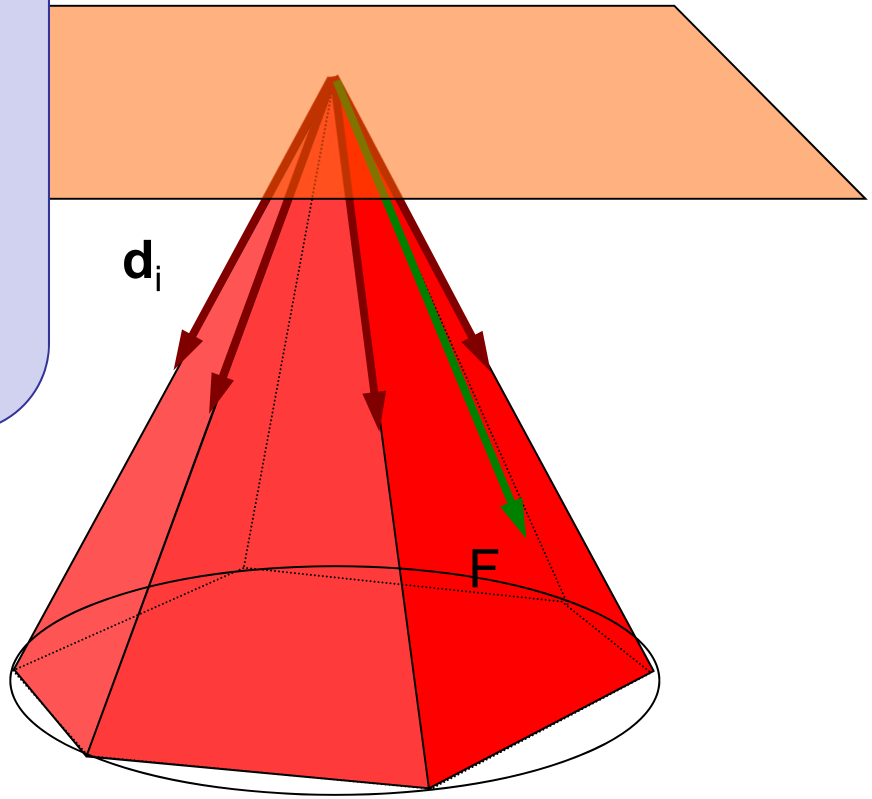
凸多面錐による近似表現



円錐が一番厳密な表現ではあるのだが、(二次元と同じように考えるために)摩擦錐を凸多面錐(上右図は6面錐)で近似表現する。面数を増やせば、より精度の良い議論ができる。

三次元物体が静止するための条件①

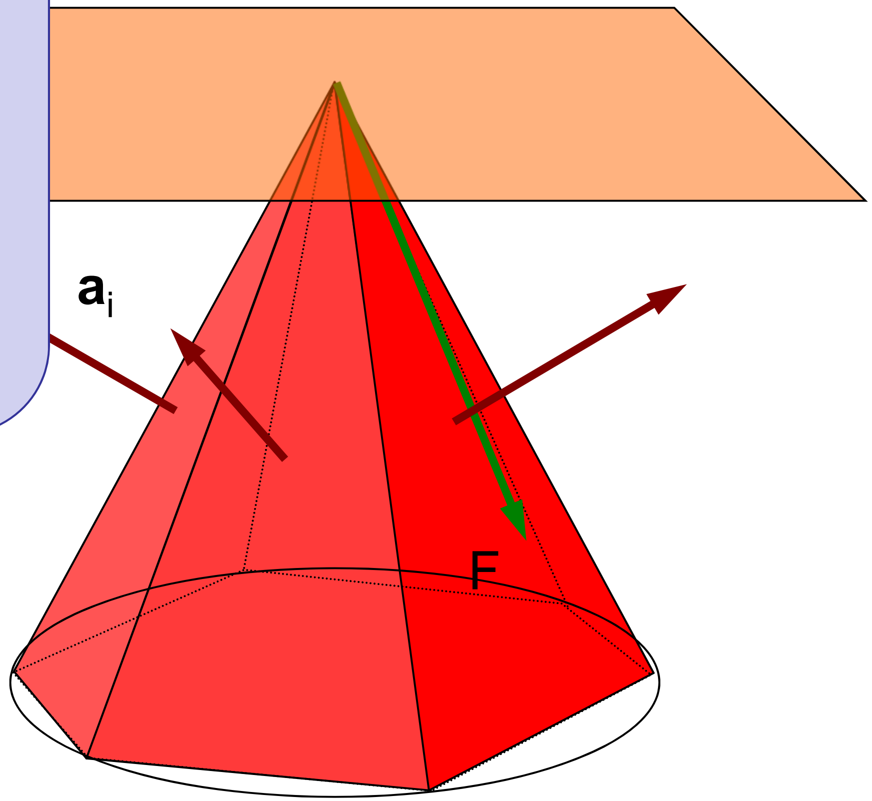
凸多面錐で近似表現すると、二次元と同じように、有限個の稜線ベクトルを定義できる。すると、二次元と同じように、安定条件を表現することができる。



$$\exists R_1, R_2, \cdots, R_m \geq 0 \ \text{ s.t. } \ R_1 \boldsymbol{d}_1 + R_2 \boldsymbol{d}_2 + \cdots + R_m \boldsymbol{d}_m = \boldsymbol{F}$$

三次元物体が静止するための条件②

凸多面錐で近似表現すると、二次元と同じように、有限個の法線ベクトルを定義できる。すると、二次元と同じように、安定条件を表現することができる。



$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{F} \le 0, \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{F} \le 0, \cdots, \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{F} \le 0$$

参考：別解法の例①

内向き単位法線ベクトルが

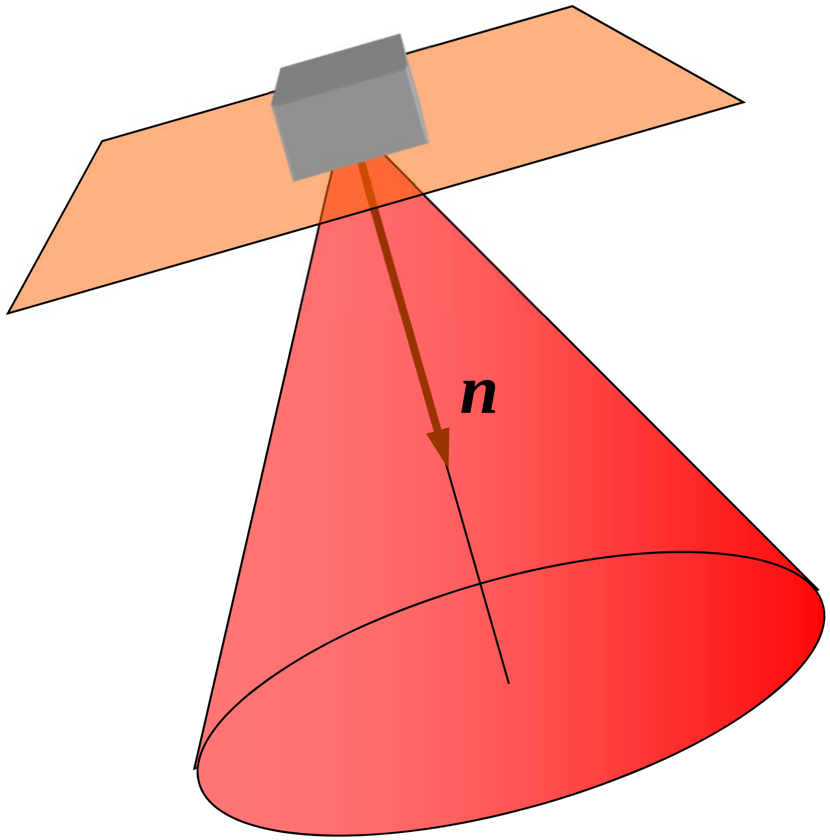
$$\boldsymbol{n} = \left[1/2, \quad 1/2, \quad -1/\sqrt{2}\right]^{\mathrm{T}}$$

で与えられる斜面上に物体が置かれている。斜面と物体との最大静止摩擦係数を $\mu_s = 1/\sqrt{3}$ とする。
この物体に

$$\boldsymbol{F} = \left[1/2, \quad -1/\sqrt{2}, \quad -1/2\right]^{\mathrm{T}}$$

で表わされる大きさ1の外力が加えられた時、物体が動き出すか否かを判定せよ。

なお、物体には外力のみが作用し、重力は考慮しないものとする。



凸多面錐による近似を用いない方法

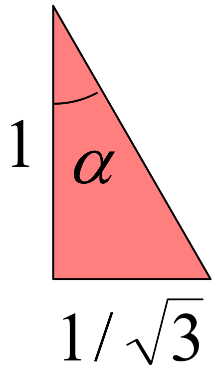
参考：別解法の例②

$$\boldsymbol{n}=\left[1/2,\quad 1/2,\quad -1/\sqrt{2}\right]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F}=\left[1/2\quad -1/\sqrt{2}\quad -1/2\right]^{\mathrm{T}}$$ より

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

ここで、 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{F}|\cos\theta,\quad |\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{F}|=1$ より $\cos\theta=\frac{1}{4}$

一方、$\mu_s=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より、摩擦錐の頂角／2をαとすると、$\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=30^{\circ}$



θ：法線ベクトル$\boldsymbol{n}$と外力$\boldsymbol{F}$とのなす角

α：法線ベクトル$\boldsymbol{n}$と摩擦錐の稜線ベクトル$\boldsymbol{d}$とのなす角

参考：別解法の例③

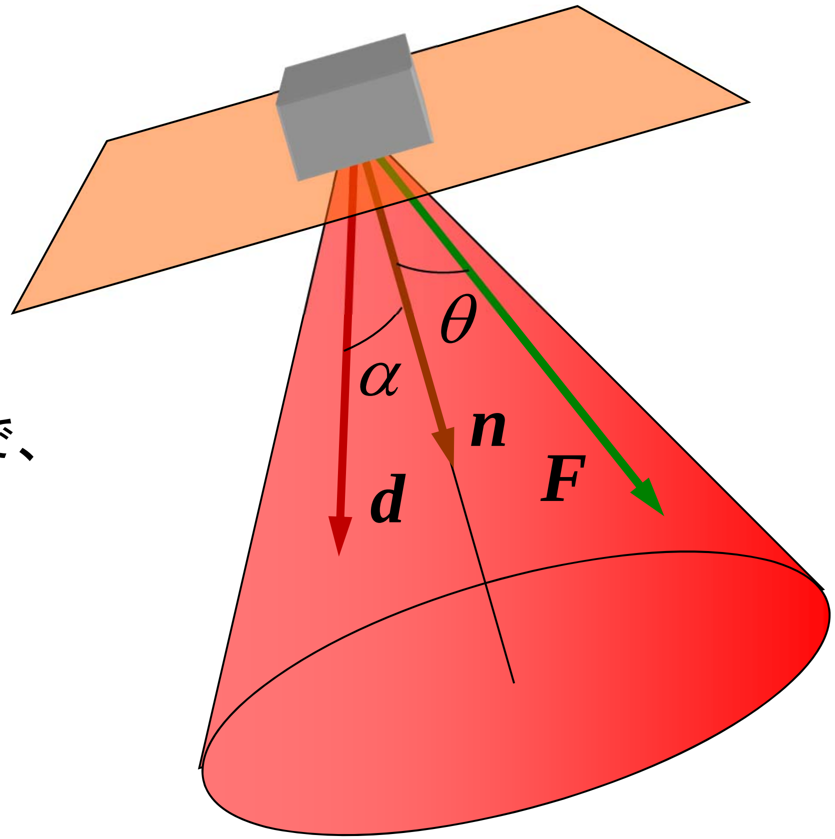
αとθ、どちらが大きいか？

$0 \le \alpha, \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ において、

$\cos\alpha > \cos\theta \Leftrightarrow \alpha < \theta$ なので、

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{1}{4} = \cos\theta$ より

$$\alpha < \theta$$



よって、外力Fは摩擦錐の内部には含まれないので、物体は動き出す。

まとめ

- 物体のハンドリングでは、接触点における摩擦が重要な役割を果たす（7章「把持」に関連）

「外力が摩擦力に勝れば接触点には滑りが生じる

→滑りが生じると物体を思うようにハンドリングできない」

- 接触点での滑りの有無を図的／解析的に判定したい

→摩擦錐（凸多面錐）

- 外力が摩擦錐の内部か境界上にある場合には、物体は滑らない