



# ハンドリング工学特論

---

大阪大学大学院 工学研究科 マテリアル生産科学専攻  
システムインテグレーション講座  
デジタル生産システム領域  
若松 栄史





# 剛体の接触

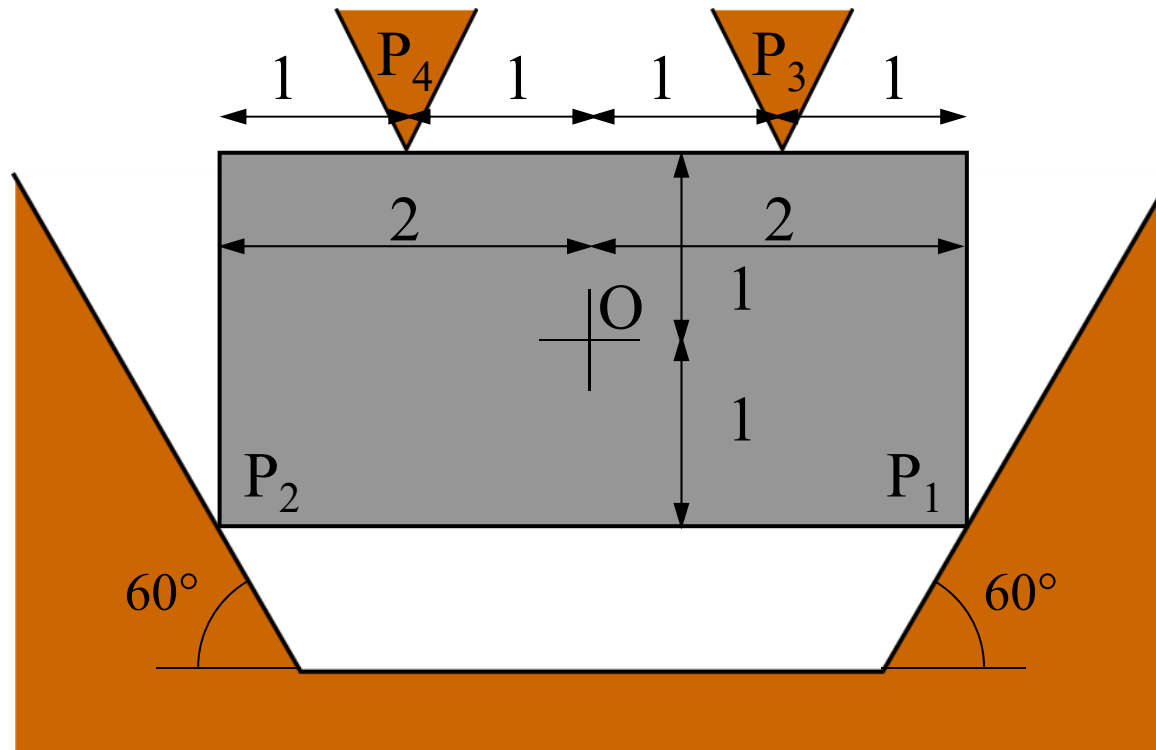
---



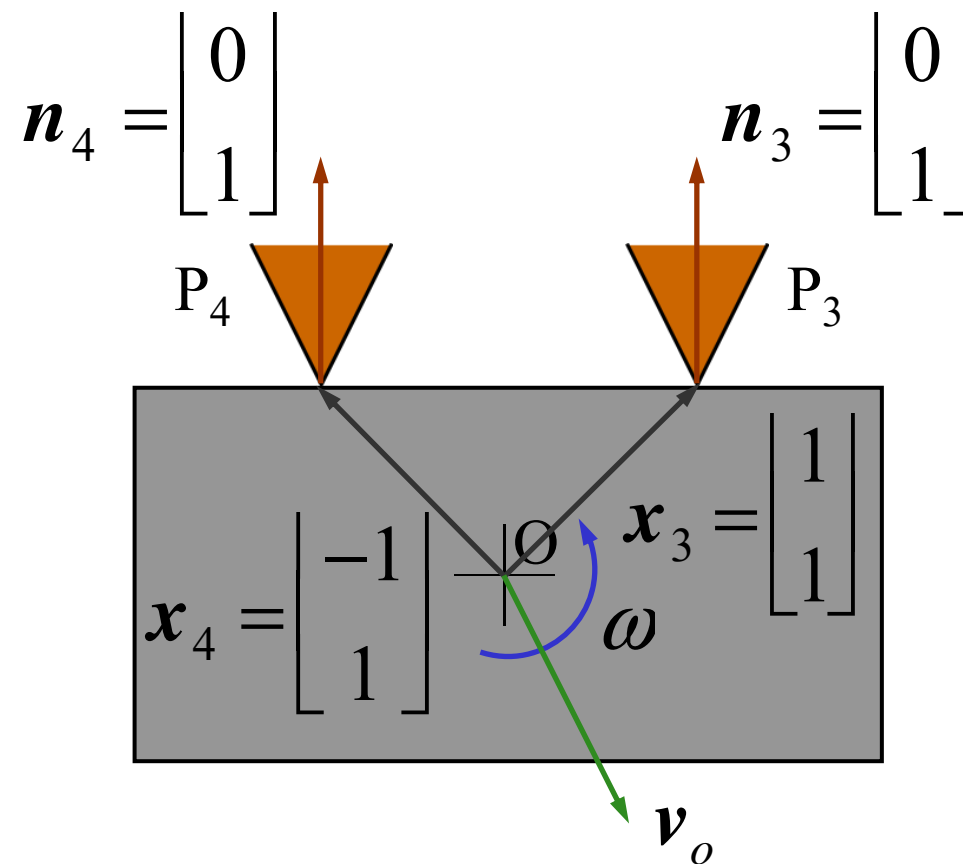
## フォームクロージャ

物体がどのような運動も実現できない(固定された)状態

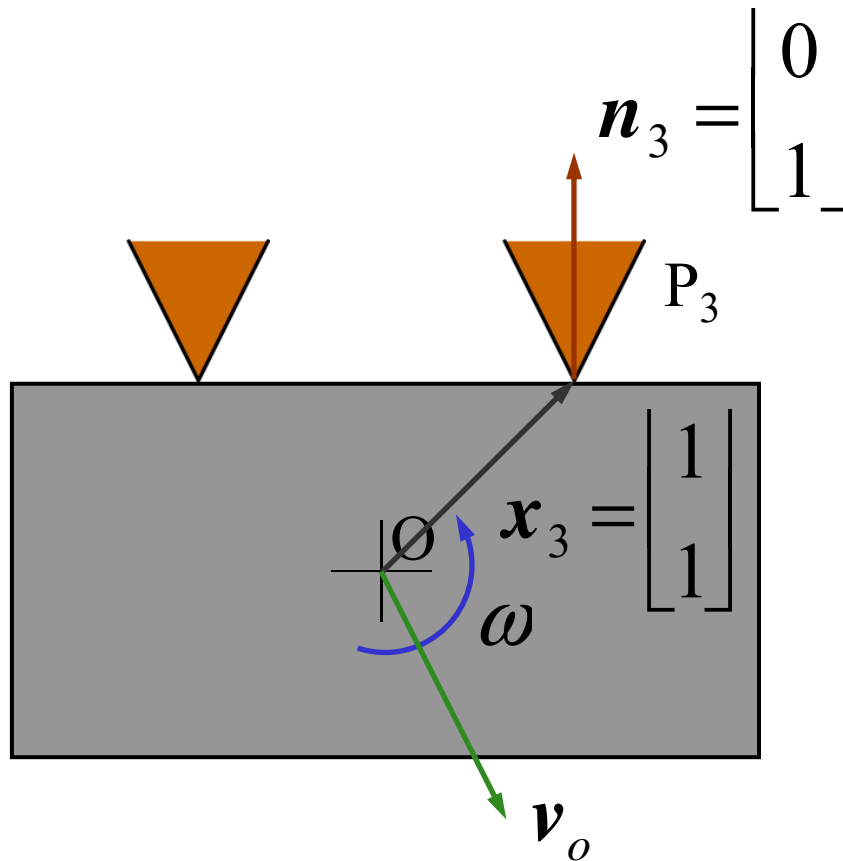
→フォームクロージャ(form closure)



## 物体と指との接触



## 接触点 $P_3$ における運動制約



$$\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{v}_o + (\mathbf{x}_3 \times \mathbf{n}_3) \cdot \omega \leq 0 \text{ より}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \omega \leq 0$$

$$v_{oy} + \omega \leq 0$$

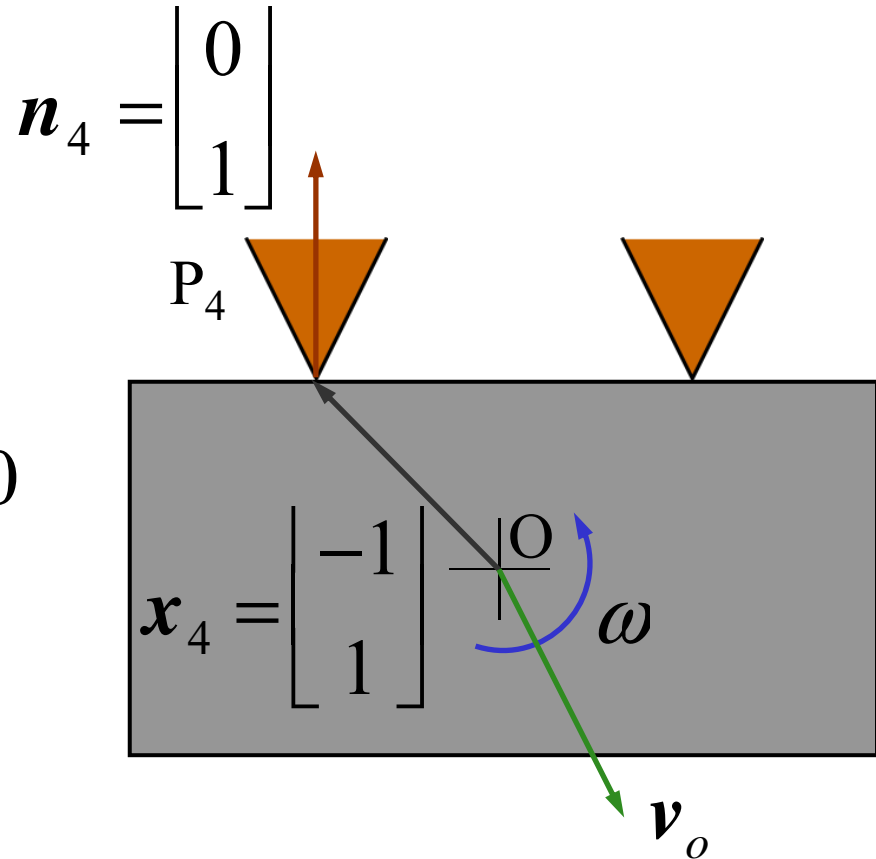


## 接触点 $P_4$ における運動制約

$$\mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{v}_o + (\mathbf{x}_4 \times \mathbf{n}_4) \cdot \boldsymbol{\omega} \leq 0 \text{ より}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \omega \leq 0$$

$$v_{oy} - \omega \leq 0$$

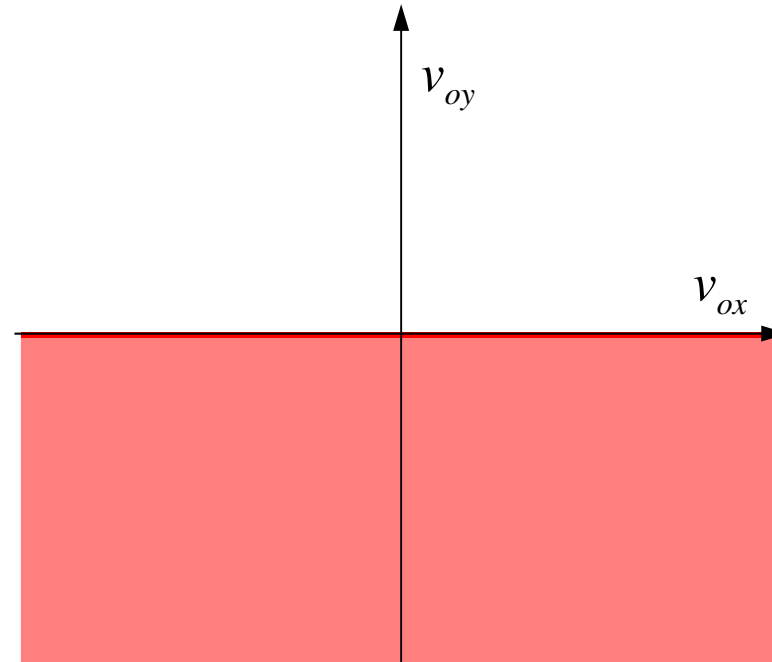




## 指との接触による運動制約①

運動に対する制約:

$$\begin{cases} v_{oy} + \omega \leq 0 \\ v_{oy} - \omega \leq 0 \end{cases}$$



$\omega = 0$  の時

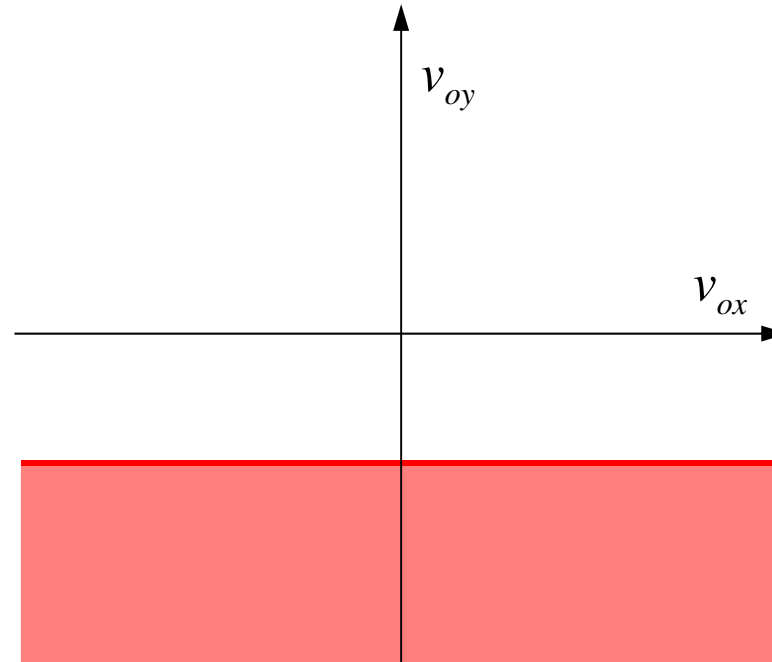
$$\begin{cases} v_{oy} \leq 0 \\ v_{oy} \leq 0 \end{cases}$$



## 指との接触による運動制約②

運動に対する制約:

$$\begin{cases} v_{oy} + \omega \leq 0 \\ v_{oy} - \omega \leq 0 \end{cases}$$



$\omega = 0$  の時

$$\begin{cases} v_{oy} \leq 0 \\ v_{oy} \leq 0 \end{cases}$$

$\omega = 1$  の時

$$\begin{cases} v_{oy} \leq -1 \\ v_{oy} \leq 1 \end{cases}$$

$\omega = -1$  の時

$$\begin{cases} v_{oy} \leq 1 \\ v_{oy} \leq -1 \end{cases}$$

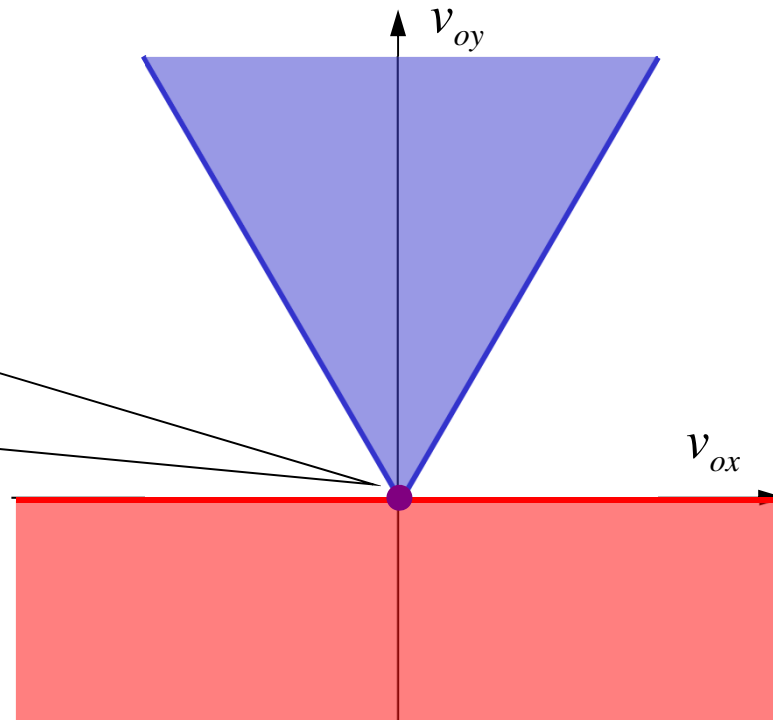




## 壁および指との接触による許容運動①

$\omega = 0$  の時

$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



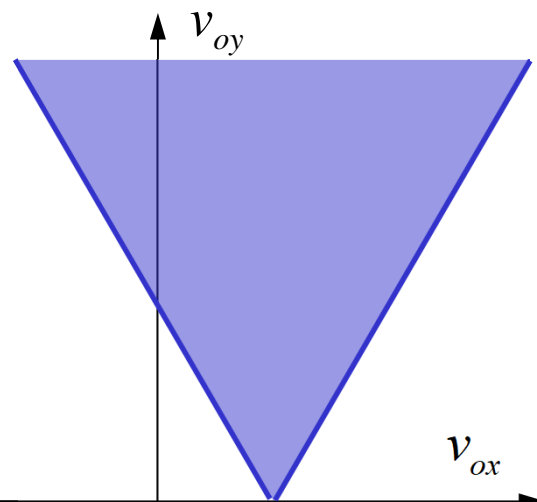
壁および指との接触による許容運動:

速度0の並進のみ→静止状態

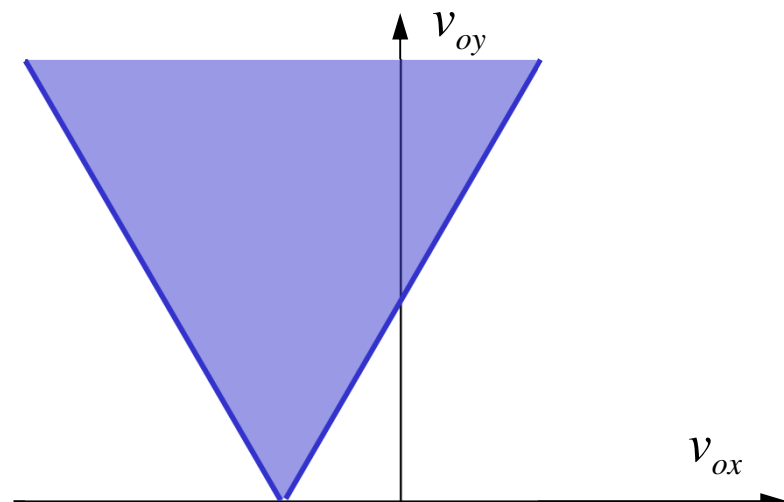


## 壁および指との接触による許容運動②

$\omega = 1$  の時



$\omega = -1$  の時

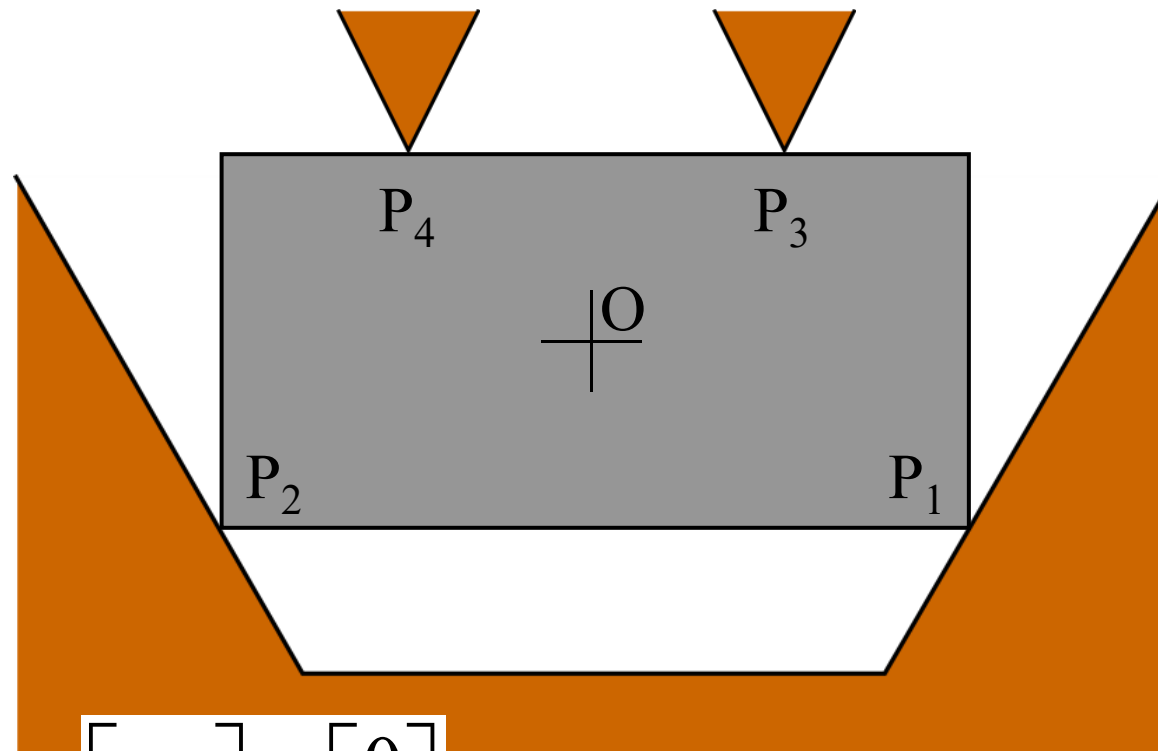


$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} = \emptyset$$

→すべての制約を満たすような並進速度は存在しない



## 壁および指との接触による許容運動③



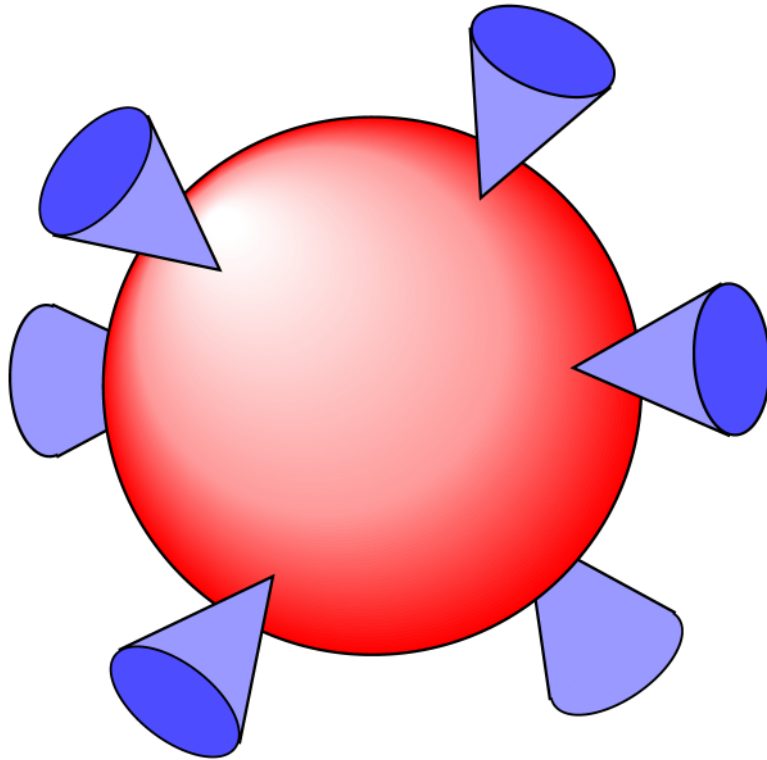
許容運動:

$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

のみ → フォームクロージャの状態



## 空間運動におけるフォームクロージャ



許容運動:

$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ v_{oz} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{のみ}$$

→フォームクロージャの状態



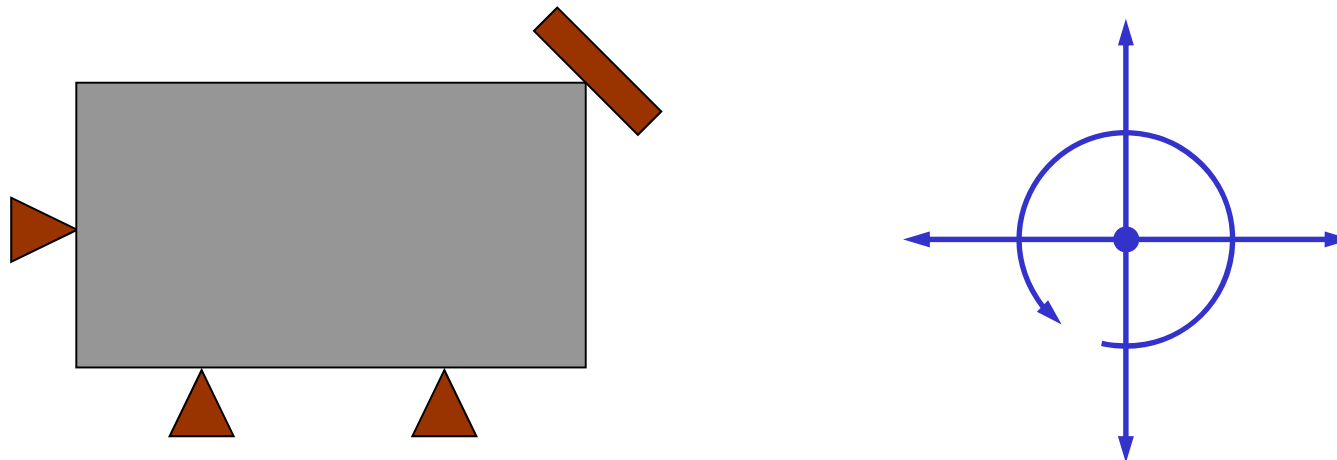
## フォームクロージャのための条件①

物体がフォームクロージャの状態にあるためには

少なくとも(物体の自由度+1)個の点接触が必要

- ◆ 平面運動の場合・・・少なくとも4個の点接触が必要
- ◆ 空間運動の場合・・・少なくとも7個の点接触が必要

最低で4個あるいは7個であって、平面運動の場合、4個あれば必ずフォームクロージャの状態になるわけではない(次のスライド参照)。



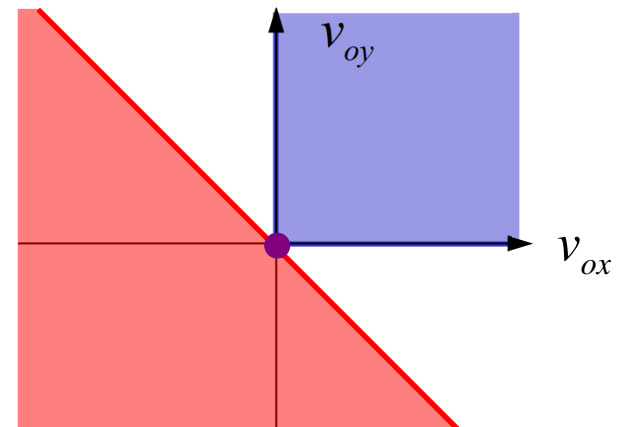
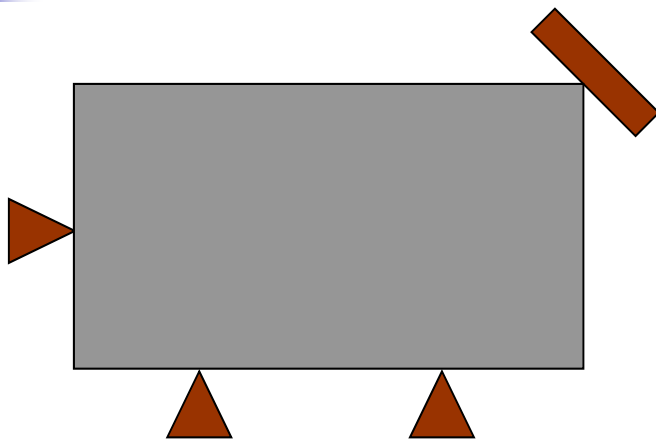
最初の二点で回転と第一軸並進の片方向を拘束

次の一点で第二軸並進の片方向を拘束

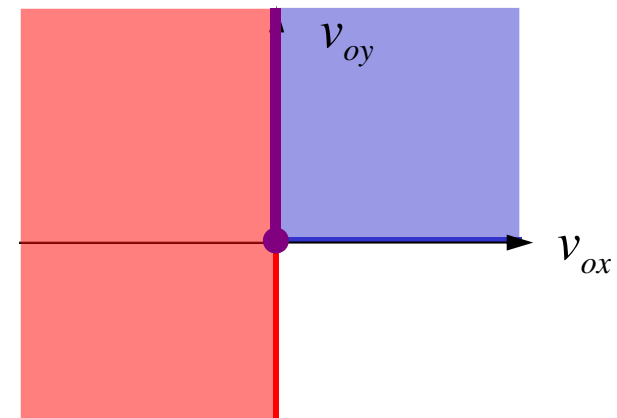
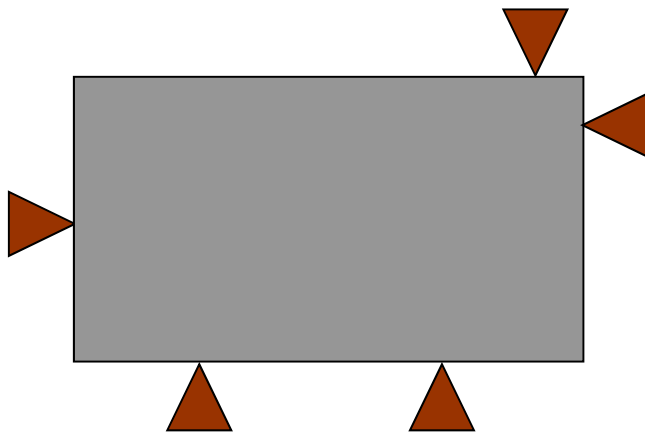
最後の一点で第一軸および第二軸並進の両方向を拘束



## フォームクロージャのための条件②



4個の点接触でフォームクロージャ



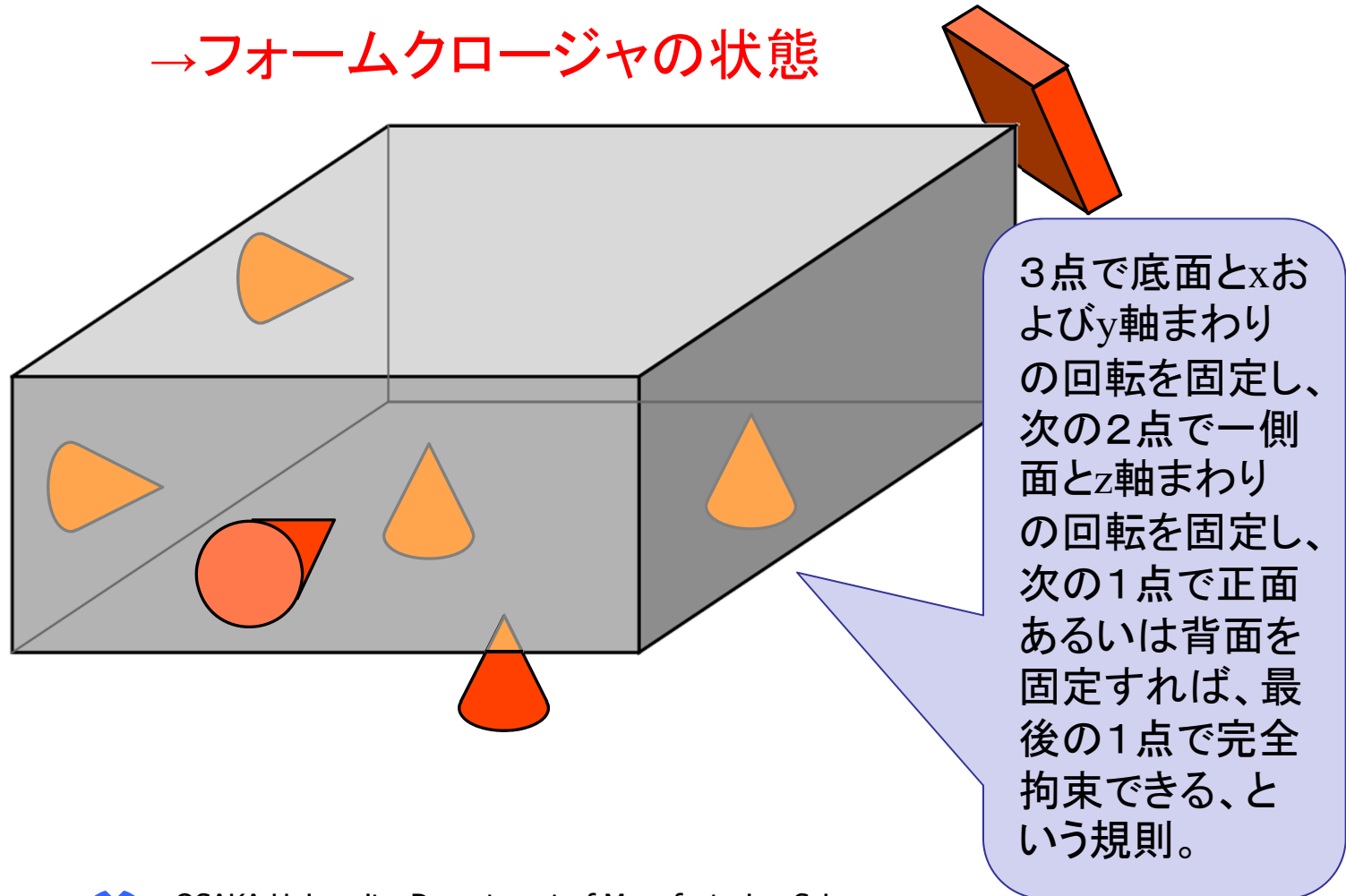
5個の点接触でフォームクロージャ



## 3-2-1の規則

3-2-1の規則: ワークを固定するためのフィクスチャの配置規則

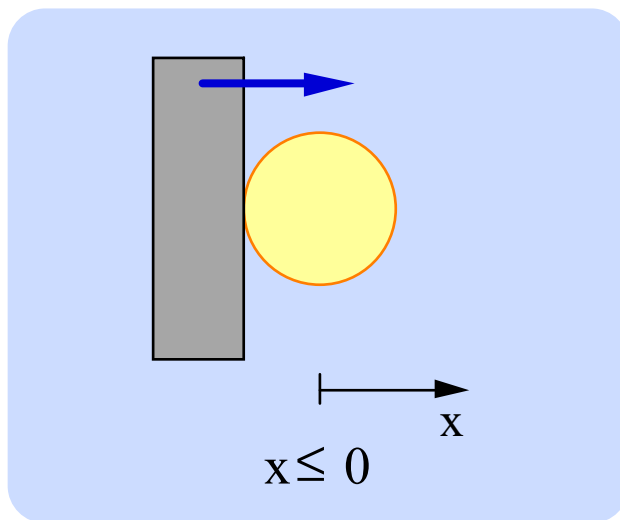
→フォームクローザの状態



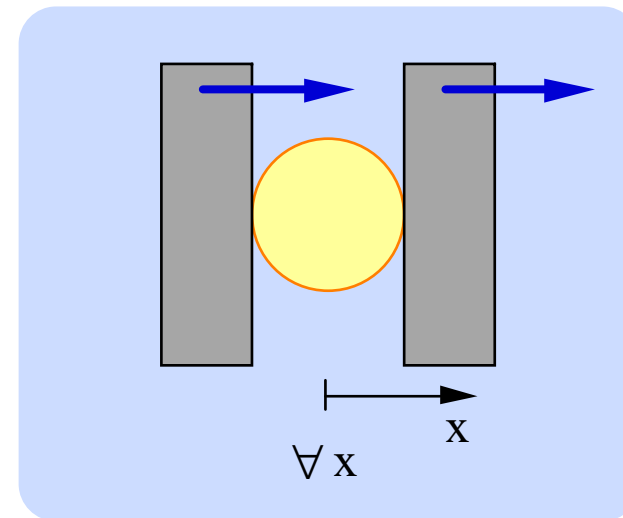
## 単方向制約①

接触による運動制約→**単方向制約 (unidirectional constraints)**

- 一方向にのみ拘束を与え、反対方向には拘束を与えない
- 一方向にのみ力を伝えることができ、反対方向には力を伝えることができない→**「押せるけど引けない」**



単方向制約



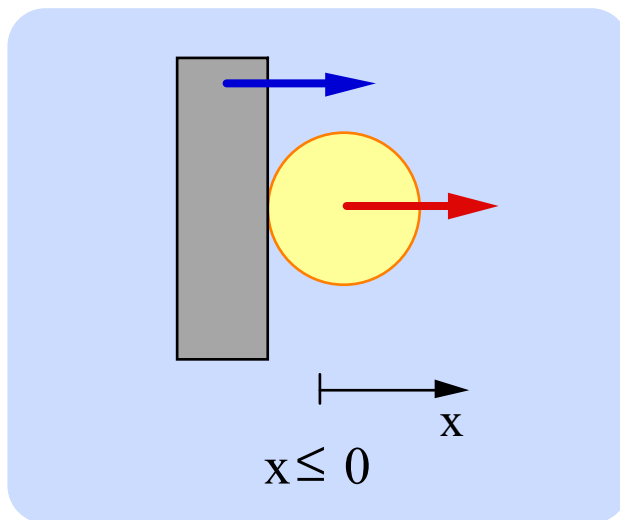
両方向制約



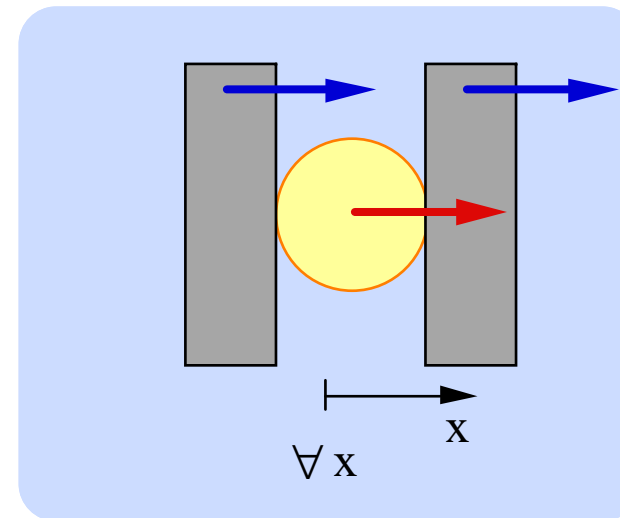
## 単方向制約②

接触による運動制約→**単方向制約 (unidirectional constraints)**

- 一方向にのみ拘束を与え、反対方向には拘束を与えない
- 一方向にのみ力を伝えることができ、反対方向には力を伝えることができない→「押せるけど引けない」



単方向制約

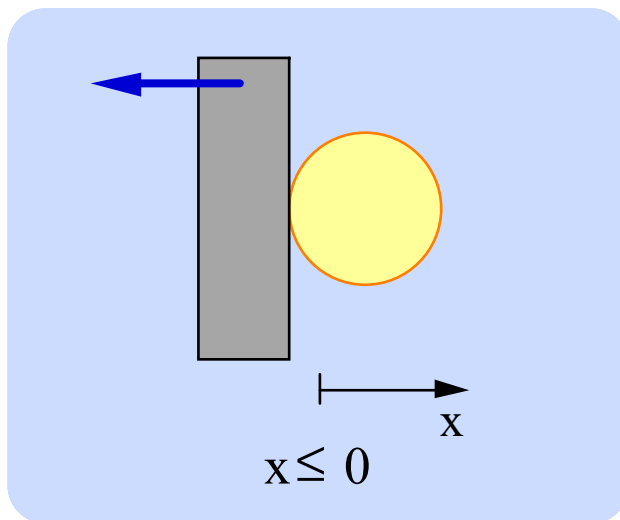


両方向制約

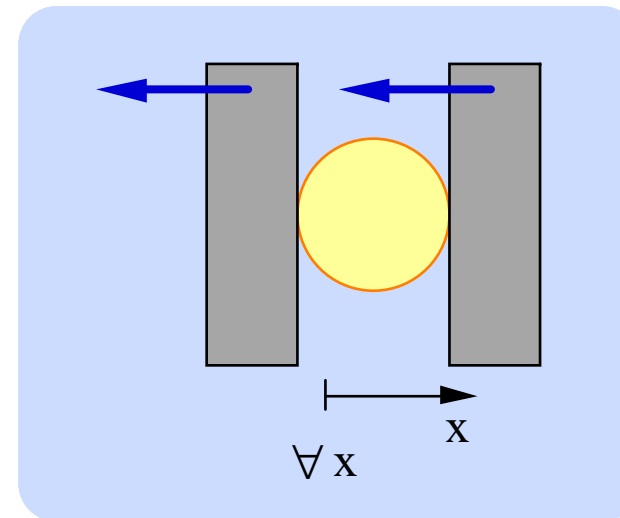
## 単方向制約③

接触による運動制約→**単方向制約 (unidirectional constraints)**

- 一方向にのみ拘束を与え、反対方向には拘束を与えない
- 一方向にのみ力を伝えることができ、反対方向には力を伝えることができない→**「押せるけど引けない」**



単方向制約



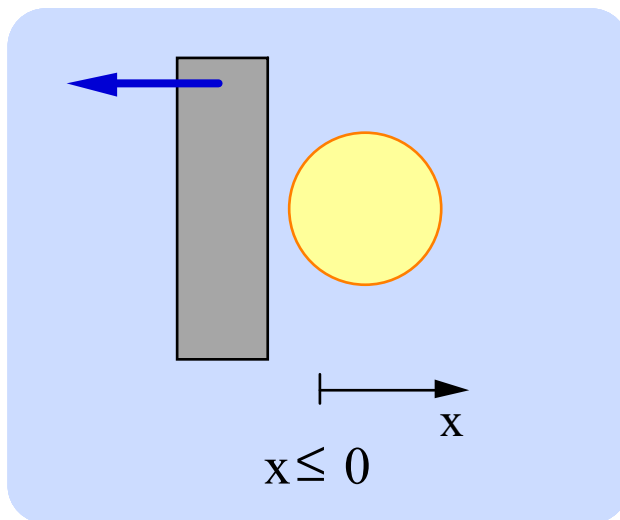
両方向制約



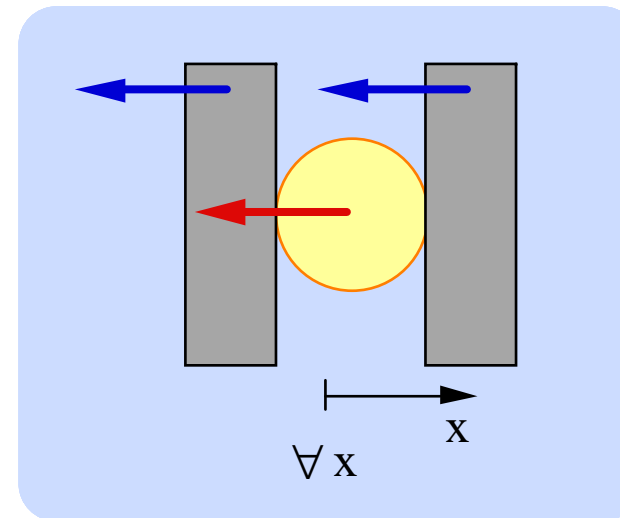
## 単方向制約④

接触による運動制約→**単方向制約 (unidirectional constraints)**

- 一方向にのみ拘束を与え、反対方向には拘束を与えない
- 一方向にのみ力を伝えることができ、反対方向には力を伝えることができない→「押せるけど引けない」



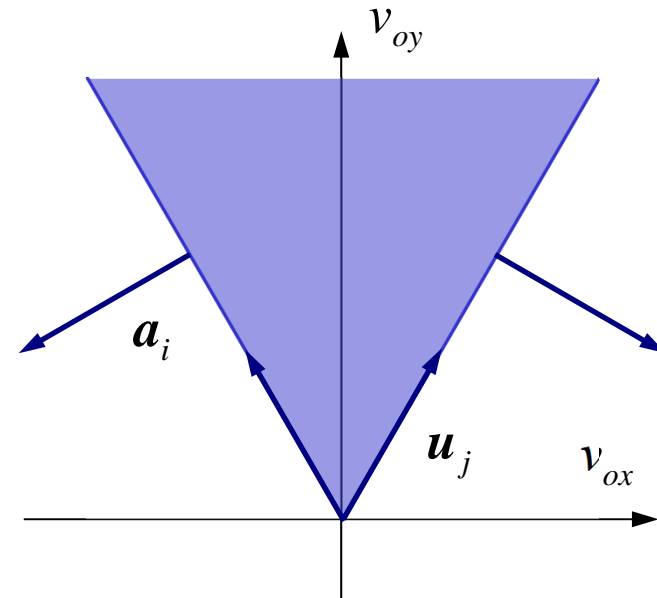
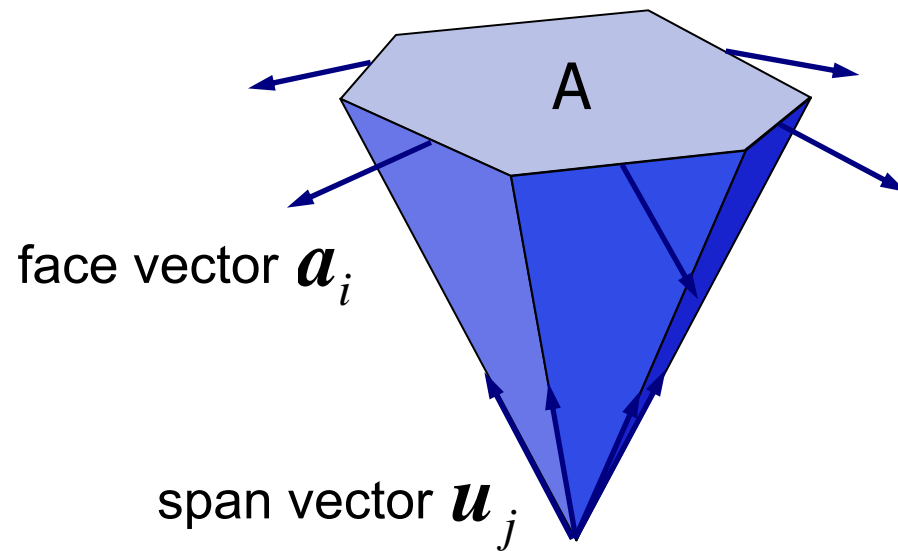
単方向制約



両方向制約

## 凸多面錐を用いた表現

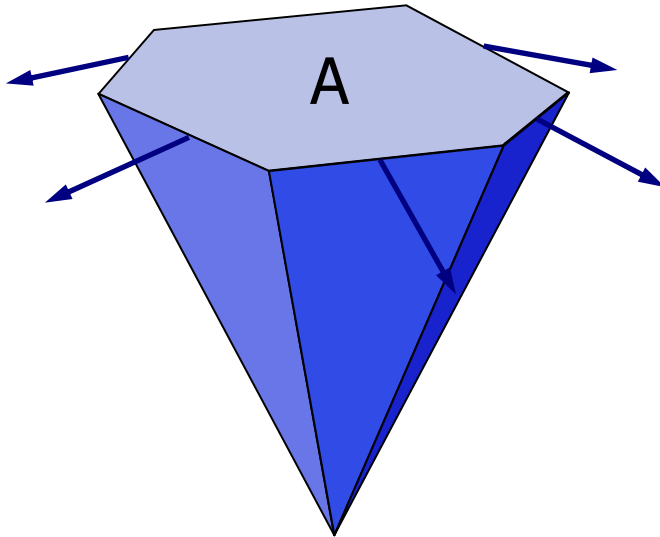
単方向制約 → 凸多面錐 (polyhedral convex cone) を用いることにより  
統一的に記述可能



## Faceベクトルを用いる表現

$$A = \text{face}\{\mathbf{a}_i\} \quad (i=1, \dots, n) \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

face vector  $\mathbf{a}_i$



$$\begin{cases} \sqrt{3}v_{ox} + (-1)v_{oy} + (-2 + \sqrt{3})\omega \leq 0 \\ -\sqrt{3}v_{ox} + (-1)v_{oy} + (2 - \sqrt{3})\omega \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ -2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ \omega \end{bmatrix}$$

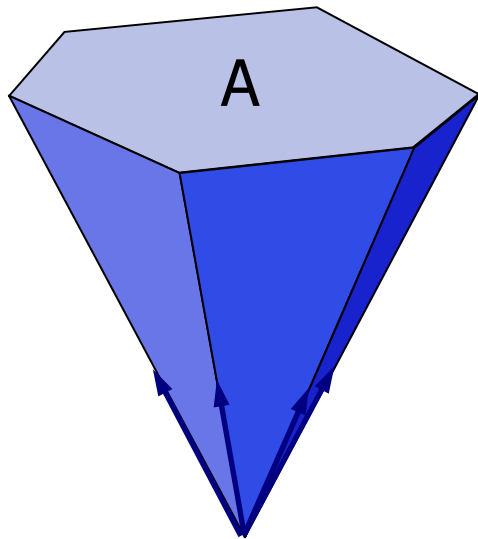
$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \leq 0, \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} \leq 0$$

$$A = \text{face}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$$



# Spanベクトルを用いる表現①

$$A = \text{span}\{\mathbf{u}_j\} \quad (j = 1, \dots, n) \quad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n R_j \mathbf{u}_j \quad R_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$



span vector  $\mathbf{u}_j$

$R$ が任意の値を取ると、凸多面錐の定義と適合しないので、少し工夫する。

$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{3})/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad c_1, c_2 \geq 0$$

$$\omega = R$$

$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{3})/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad c_1, c_2 \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ \omega \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{3})/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R : \text{任意} \\ c_1, c_2 \geq 0 \end{array}$$

## Spanベクトルを用いる表現②

$$\begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ \omega \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} (2-\sqrt{3})/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad R: \text{任意} \\ c_1, c_2 \geq 0$$

$$= (R_1 - R_2) \begin{bmatrix} (2-\sqrt{3})/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_1, R_2, c_1, c_2 \geq 0$$

$$= R_1 \begin{bmatrix} (2-\sqrt{3})/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + R_2 \begin{bmatrix} -(2-\sqrt{3})/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_1, R_2, c_1, c_2 \geq 0$$

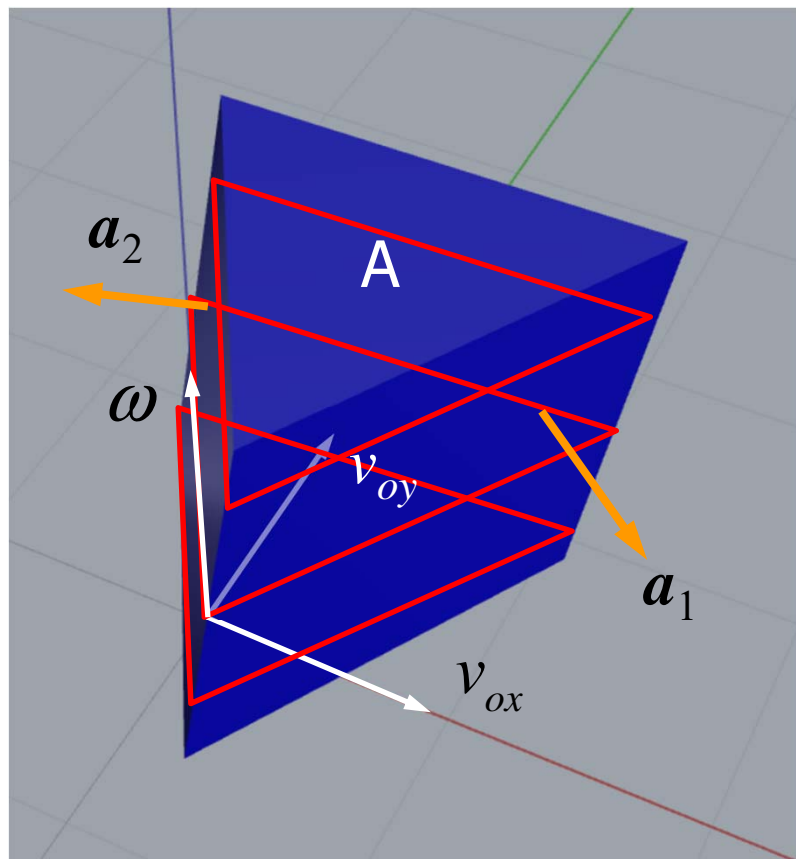
$$\mathbf{x} = R_1 \mathbf{b}_1 + R_2 (-\mathbf{b}_1) + c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \quad R_1, R_2, c_1, c_2 \geq 0$$

$$A = \text{span}\{\mathbf{b}_1, -\mathbf{b}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$$

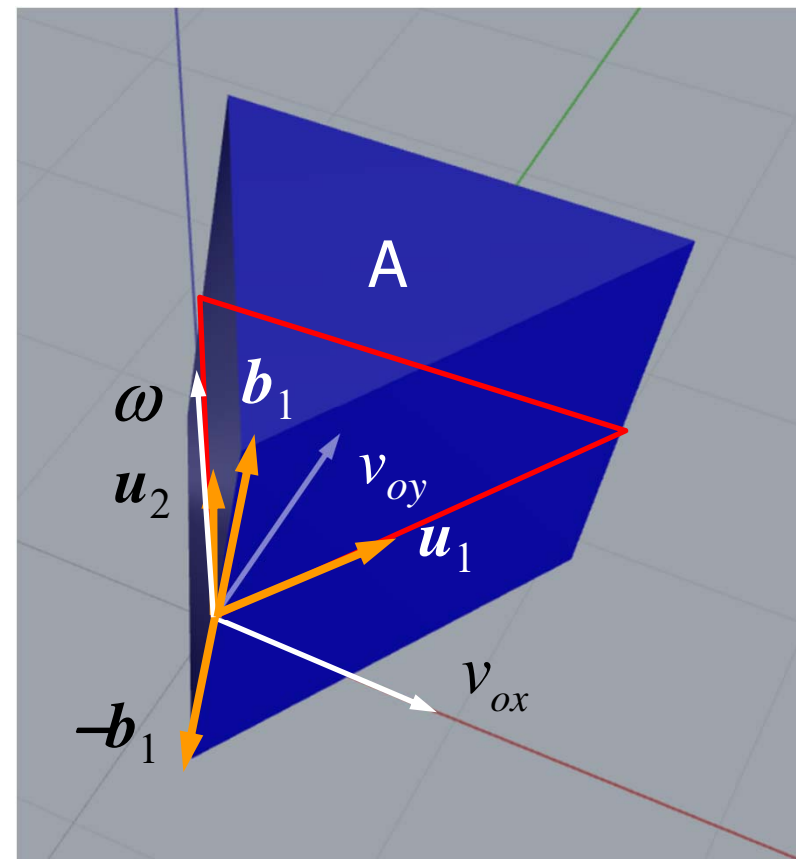
$R = R_1 - R_2$ 、ただし  $R_1 \geq 0$ 、 $R_2 \geq 0$  とおくと、  
 $R_1 \geq R_2$  の時は  $R \geq 0$ 、  
 $R_1 \leq R_2$  の時は  $R \leq 0$  と  
 することができる。



## Faceベクトル／Spanベクトルを用いる表現



$$A = \text{face}\{a_1, a_2\}$$



$$A = \text{span}\{b_1, -b_1, u_1, u_2\}$$







## まとめ①

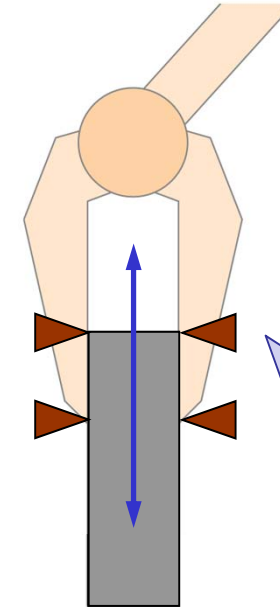
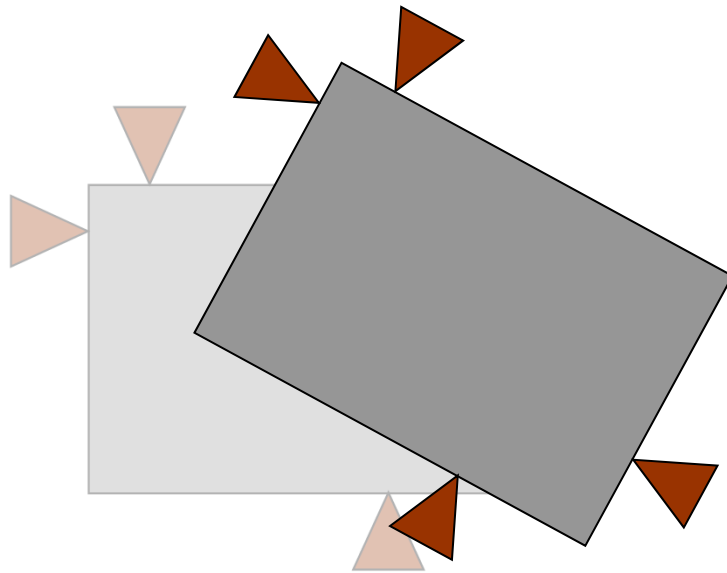
---

- 接触状態が異なれば、物体に加えられる運動制約も異なる  
→具体的に、接触によってどのような制約が加えられるのか？
- 物体の運動に対する制約は、**速度と角速度に関する一次不等式**によって表される
- 運動制約から得られる許容運動は、**凸多面錐**を用いて表される
- 許容運動が静止状態のみの場合、物体は**フォームクロージャ**の状態にある



## まとめ②

- フォームクロージャ: 物体の運動を幾何学的に完全に拘束した状態
- ロボットハンド等により物体がフォームクロージャの状態にある時  
→ ハンドを制御することにより物体を任意の位置・姿勢に制御可能



この持ち方はフォームクロージャではないが、物体を任意の位置・姿勢に制御可能

フォームクロージャではなくても  
任意の制御が可能 → 摩擦を利用した拘束(次回の話へ)

